普通高等院校大学数学“十三五”规划教材

高 等 数 学

刘秀英　主编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书在充分吸取当前优秀“高等数学”教材精华的基础上，结合多年的教学实践经验，针对学生的知识结构和习惯特点编写而成。内容包括函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数应用，一元函数积分学，常微分方程初步，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学及其应用，多元函数积分学，无穷级数等知识。书后附有常用三角函数公式及其图形、极坐标与平面坐标的关系和几种常见函数曲线等内容。

本书注重高等数学的基本概念、基本理论、基本方法的阐述，体系完整，条理清晰。书中的例题、习题都是经过精心编选的，并给出了习题参考答案。

本书可作为“高等数学”教学时数较少的理工农林等本科（含春季高考）专业，理工农林等各类专科、高职专业“高等数学”课程的教材；也可作为成人教育相关专业本、专科教材和从事高等数学教学工作的教师参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 刘秀英主编. —北京：电子工业出版社，2017.8

ISBN 978-7-121-31921-1

I. ①高…　II. ①刘…　III. ①高等数学－高等学校－教材　IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 133643 号

策划编辑：窦　昊
责任编辑：窦　昊
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编　100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：16.75　字数：428.8 千字
版　　次：2017 年 8 月第 1 版
印　　次：2017 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：39.90 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254466，douhao@phei.com.cn。

前　　言

高等数学是高等院校一门重要的基础理论课程，也是学生学习其他后续课程的重要工具。本书按照新形势下高等数学教学改革的精神，针对当前大学生的特点，在编者多年教学实践的基础上，借鉴近年来出版的多本同类教材的成功经验，并结合高等教育培养高素质应用型人才数学课程设置的教学理念编写而成。

在编写过程中，我们力求贯彻“强化概念，淡化理论，加强计算，学以致用”的原则，恰当把握教学内容的深度和广度，尽可能地显示出高等数学的直观性和应用性，并注意保持教材的系统性和逻辑性；内容安排循序渐进，充分考虑先行内容和后续内容的衔接。同时力求文字表述精练准确、通俗易懂，逻辑性强，公式、符号的采用简洁明了；几何图形直观形象；并省略了过分复杂的计算和证明。

本教材注重高等数学的基本概念、基本理论、基本方法和基本技能的训练，注重对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、计算能力和解决实际问题能力的培养，精心编选大量典型例题，每节后习题的配备类型合理，深度和广度适中，以便学生围绕本章节内容进行学习和训练，巩固和理解所学理论。

本教材共分 9 章，各章节主要内容及习题和参考答案的编者如下：第一章由闫德宝编写，第二章由王瑞苹编写，第三章由秦美青编写，第四章由司凤娟编写，第五章由于加尚编写，第六章由张凤丽编写，第七章由孔祥强编写，第八章由武秀美编写，第九章由朱青编写，附录和本书涉及的图像由王永亮编写；全书的统稿和审校工作由刘秀英完成。菏泽学院教务处和数学与统计学院领导及同仁对本书的编写和出版给予了大力支持，在此谨表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，教材中一定存在不妥之处，敬请专家、同行和广大读者批评指正。

编　者

2017 年 6 月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

高等数学是关于微积分及其应用的一门基础课程. 微积分的研究对象是函数及其性质，所采用的研究方法就是极限方法. 本章将介绍函数、极限和函数的连续性等知识，这些内容是学习高等数学这门课程的基础.

第一节　函　　数

一、实数及其性质

在生产实践过程中，我们的祖先最先认识了自然数. 随着生产力的发展，自然数已不能满足人类的需要，便将数扩充为包含零和负整数的整数. 对整数做除法，便得到有理数. 任一有理数都可以表示为 $\frac{m}{n}$ 的形式，其中 m,n 为整数且 $n\neq 0$. 公元前 500 年前，古希腊的毕达哥拉斯学派发现，当等腰直角三角形的两直角边是 1 时，其斜边无法用有理数表示. 这一发现引起了毕达哥拉斯学派的恐慌与恼怒，传说他们把发现这一事实的西波索司残忍地杀害了. 但西波索司的发现却使人类认识到，除了有理数外，确实还存在着 “无理的数”. 人们后来称之为“无理数”，即无限不循环小数.

有理数与无理数的全体称为实数，它们构成的集合称为实数集合，通常用 $\mathbf{R}$ 表示.

通过数学家康托尔等人的努力，人们发现对实数进行任意分割时，新的、陌生的数不会产生，这说明实数本身具有“完备”的性质，我们现在称这一性质为“实数的连续性”.

引进数轴后，全体实数与数轴上的点之间就有了一一对应的关系. 这一对应关系，将直线的连续性和实数的连续性统一起来. 不难知道，实数集等价于整个数轴上的点的集合.

二、集合与区间

在这里，我们把指定的有限多个或无限多个事物所组成的总体称为一个集合. 组成这个集合的事物称为该集合的元素. 通常是以大写的拉丁字母 A，B，C，$\cdots$ 等表示集合. 若事物 a 是集合 M 的元素，记作 $a\in M$(读作 a 属于 M)；若事物 a 不是集合 M 的元素，记作 $a\notin M$(读作 a 不属于 M).

集合分为有限集合和无限集合. 由有限个元素组成的集合称为有限集合，简称有限集；由无限个元素组成的集合称为无限集合，简称无限集.

表示集合的常用方法有两种. 一种称为列举法，就是把一个集合中的元素都一一列举出来，如，由元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 组成的集合 X 可表示为

$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}；$$

另一种称为描述法，就是把一个集合的元素所具有的某种特征用语言表述出来，如，由 $1,2,\cdots,10$ 所组成的集合 X 可表示为

$$X=\left\{x \middle| \text{小于等于10的自然数}\right\}.$$

本教材用到的主要是数集，即元素都是数的集合. 若无特别说明，书中提到的数都是实数. 将全体非负整数即自然数的集合记作 **N**，全体整数的集合记作 **Z**，全体有理数的集合记作 **Q**，全体实数的集合记作 **R**.

如果集合 X 的元素都是集合 Y 的元素，即若 $x\in X$，则必有 $x\in Y$，就说 X 是 Y 的子集，记作 $X\subset Y$, 或 $Y\supset X$. 前面提到的几个数集就有如下关系

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}.$$

如果 $X\subset Y$, 且 $X\supset Y$，就称集合 X 与 Y 相等，记作 $X=Y$.

另外，在表示数集的字母的右上角加上“+”、“−”等上标，表示该数集对应的子集. 如 $\mathbf{Z}^{+}$表示全体正整数的集合，由此可得出其他数集的类似符号的意义.

不含任何元素的集合称为空集，用符号 $\varnothing$ 来表示. 如 $\{x|x\in\mathbf{R},\ x^2+1=0\}$ 是空集. 我们规定，空集是任何集合的子集.

下面再介绍一下区间，区间是常用的一种数集. 设 a,b 都是实数，且 $a<b$. 数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\left\{x\middle|a<x<b\right\}.$$

a,b 称为开区间 (a,b) 的端点，且 $a\notin(a,b), b\notin(a,b)$. 数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$\left[a,b\right]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a,b 称为闭区间 $\left[a,b\right]$ 的端点，且 $a\in\left[a,b\right], b\in\left[a,b\right]$. 类似地还有如下的半开半闭区间

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\},(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}.$$

上面介绍的区间统称为有限区间. 数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段（见图 1-1）.

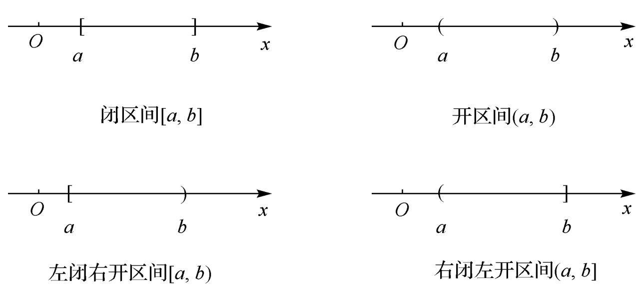


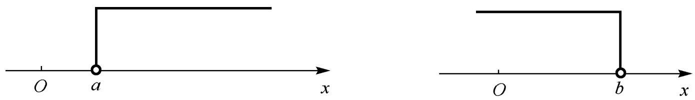
图 1-1

此外，还有无限区间. 我们先引进两个记号：$+\infty$，读作正无穷大；$-\infty$，读作负无穷大. 它们仅是两个符号，不表示具体的数字. 利用这两个记号就可以将无限的半开或开区间表示如下：

$$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\}，\quad(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}，\quad(a,+\infty)=\{x|a<x\}，\quad(-\infty,b)=\{x|x<b\}.$$

这些区间在数轴上表现为长度为无限的半直线（见图 1-2）.

实数集合 **R** 也记作 $(-\infty,+\infty)$，它是一个开区间.



无穷区间$[a,+\infty)$　　　　无穷区间$(-\infty,b]$

图 1-2

以后本书中若所论述问题对不同类型的区间都适用，则为了叙述的方便，我们用“区间I”代表各种类型的区间.

三、邻域

设a和δ是两个实数，且$\delta>0$. 数集$\{x||x-a|<\delta\}$称为点a的δ邻域，记作$U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}.$$

点a称为$U(a,\delta)$的中心，δ称为$U(a,\delta)$的半径.

由于$|x-a|<\delta$等价于$-\delta<x-a<\delta$，或$a-\delta<x<a+\delta$，所以还有

$$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}.$$

因此可以看出，$U(a,\delta)$实际上就是开区间$(a-\delta,a+\delta)$.

在数轴上，$|x-a|$表示点x与点a之间的距离，因此点a的δ邻域$U(a,\delta)$在数轴上表示与点a距离小于δ的所有点的全体，这也是开区间$(a-\delta,a+\delta)$.

有时用到的邻域不需要其中心点. 点a的δ邻域去掉中心a后，称为点a的去心δ邻域，也称为点a的空心δ邻域，记作$\overset{\circ}{U}(a,\delta)$，即

$$\overset{\circ}{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}.$$

四、函数

1. 函数概念

在很多实际问题中，我们通常能发现其中一个变量依赖于另外一个或几个变量. 在微积分学中，首先要研究的就是变量之间某种确定的依赖关系，也就是研究两个或两个以上变量之间的函数关系. 在这里，首先讨论两个变量之间的情形，也就是两个变量之间的函数关系. 为了更好地理解函数的概念，我们来看一个简单的例子.

例 1　一物体从高处以初速度为 0 的自由落体运动下落，经过t秒后，物体下落的距离为S，则有如下的关系式成立

$$S=\frac{1}{2}gt^2 \qquad (0\leqslant t\leqslant t_0).$$

其中，t_0是落地时间，g是重力加速度.

上述例子中，包含了两个变量，一个是时间t，一个是距离（位移）S，但它们的地位是不一样的，距离S是随着时间t的变化而变化的. 对t在$[0,t_0]$内的每一个值，都可以通过关系式唯一地确定与之对应的S的值. 这种量与量之间的对应关系，实际上反映了下面要给出的函数概念的本质.

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是给定的一个数集. 如果按照某种对应法则 f，对于每个 $x\in D$，都有唯一确定的 y 值和它相对应，则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的函数，记作

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

数集 D 称为函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量.

与自变量 x 对应的因变量 y 的值记作 $f(x)$，称为函数 f 在点 x 处的函数值. 如当 x 取值 $x_0\in D$ 时，对应的 y 值就可以表示为 $f(x_0)$. 当 x 取遍定义域 D 内的所有数值时，对应的全体函数值所组成的集合 $V=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

对函数的定义，要注意下面几点.

（1）由定义不难知道，函数的定义包含两个要素：定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域和对应法则相同，那么这两个函数就是相同的，否则就不同.

（2）定义 1.1 给出的函数实际上是单值函数. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 有多个值和它相对应，则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的多值函数. 如函数 $y^2=x$，$x>0$ 所确定的函数就是一个多值函数. 多值函数一般可分解为几个单值函数进行讨论. 如不作特别说明，本书所采用的函数都是单值的.

（3）函数的记号 f 也可以改用其他字母，如 φ,ω,F,G,H 等，相应地函数可表示为 $y=\varphi(x)$，$y=\omega(x)$，$y=F(x)$，$y=G(x)$，$y=H(x)$ 等. 有时还直接利用因变量的记号来表示函数，如把函数记作 $y=y(x)$. 这时 y 既表示因变量，又表示函数.

在实际问题中，函数的定义域是根据实际问题的实际意义确定的. 如圆的面积公式 $S=\pi r^2$ 的定义域为 $D=(0,+\infty)$.

但在抽象的数学中，一般不考虑函数的实际意义. 在这里我们约定：函数的定义域就是自变量所能取的使函数表达式有意义的一切实数的集合，这样的定义域有时也称为函数的自然定义域. 例如，函数 $y=\ln(x+1)$ 的定义域为 $\{x|x>-1\}$；函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域为 $(-1,1)$.

在中学代数课程中我们已经学过，表示函数的方法很多，常见的有表格法、图像法、解析法（用具体的数学式子）和描述法等. 下面再给出几个函数的例子.

例 2　函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & 当\ x\geqslant 0;\\ -x, & 当\ x<0.\end{cases}$$

这个函数称为绝对值函数，它的定义域 $D=\{x|-\infty<x<+\infty\}$，值域为 $V=\{x|x\geqslant 0\}$. 它的图像如图 1-3 所示.

例 3　函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

这个函数称为符号函数，它的定义域 $D=\{x|-\infty<x<+\infty\}$，值域为 $V=\{x|x=1,0,-1\}$. 它的图像如图 1-4 所示. 容易验证，对任何实数 x，下面的关系都成立：$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$.

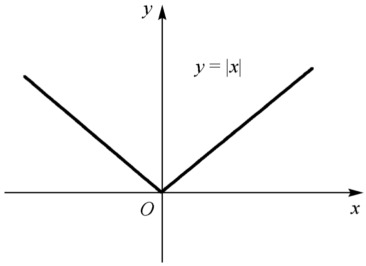


图 1-3

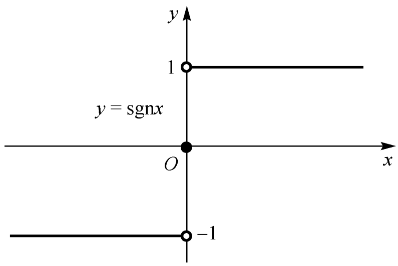


图 1-4

例 4　函数

$$f(x)=[x],$$

称为取整函数（见图 1-5），$[x]$表示不超过 x 的最大整数．它的定义域为 $D=\{x|-\infty<x<+\infty\}$，值域为整数集 **Z.** 如 $f(0.5)=[0.5]=0$， $f(1.5)=[1.5]=1$，$f(-5.5)=[-5.5]=-6$．

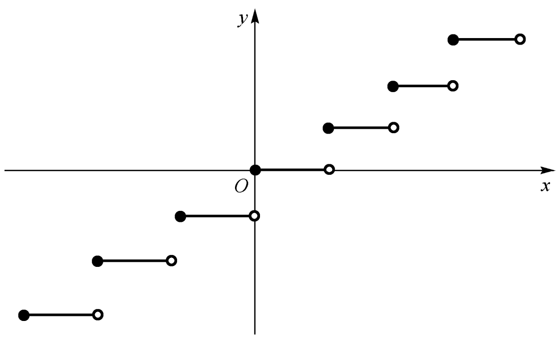


图 1-5

上述三个例子中的函数有一个共同的特点，那就是函数在其定义域的不同部分，对应的表达式不同，这样的函数称为分段函数．今后还会遇到很多其他的分段函数．

2．函数的几种特性

（1）函数的有界性．

定义 1.2　设函数 $f(x)$ 定义于 D 上，如果存在某正数 M，使得对于一切 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，也可以称 $f(x)$ 在 D 上是有界函数；如果不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 在 D 上无界，也可以称 $f(x)$ 在 D 上是无界函数．

例如，函数 $f(x)=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的，因为可取 $M=1$，则对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $|\cos x|\leqslant 1$ 成立．实际上，对任意的 $M\geqslant 1$，我们都可以说明这个结论．又如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内无界，但它在区间 $[a,+\infty)(a>0)$ 内有界．由此可以知道，函数的有界性不仅取决于函数本身，还取决于自变量的取值范围．

函数的有界性还可以如下表述：如果存在常数 M_1 和 M_2，使得对任意 $x\in D$，都有 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$，就称 $f(x)$ 在 D 上有界，而 M_1 和 M_2 分别称为 $f(x)$ 在 D 上的一个下界和上界．

（2）函数的单调性.

定义 1.3　设函数 $f(x)$ 定义于 D 上，如果对于任意的 $x_1,x_2\in D$，且 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加；如果对于任意的 $x_1,x_2\in D$，且 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调减少.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内单调减少，而在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加. 函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，而函数 $f(x)=\cos x$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内不单调.

（3）函数的奇偶性.

定义 1.4　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；若对于任意的 $x\in D$，$f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

需注意的是，函数的奇偶性是定义在以原点为中心的对称区间上的，非对称区间上不能定义奇偶性. 如 $f(x)=\sin x$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上是奇函数，但在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 不是奇函数. 另外，奇函数的图形对称于原点（见图 1-6），偶函数的图形对称于 y 轴（见图 1-7）.

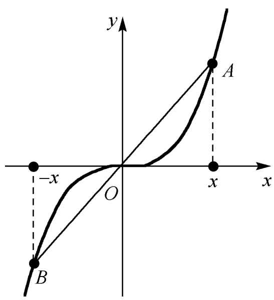


图 1-6

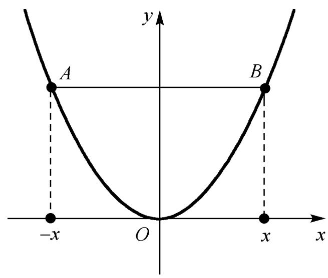


图 1-7

（4）函数的周期性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在不为零的数 l，使得对任意的 $x\in D$，有 $x\pm l\in D$，且 $f(x\pm l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期.

通常所说的周期函数的周期是指其最小正周期. 周期函数的图像呈周期性重复，因此只要知道它在任一周期上的图像，就可以得到它的全部图像. 周期函数的图像可参考三角函数的图像（见本书的附录部分）.

3. 反函数

函数 $y=f(x)$ 反映了某一变化过程中两个变量 x 和 y 间的对应关系，根据问题的具体情况选择一个变量作为自变量，另一个就是因变量. 当自变量 x 在定义域 D 内取定一个值后，因变量 y 的值也随之唯一确定. 然而，自变量与因变量的选择并不是绝对的，往往是根据讨论的需要确定的. 事实上，把一个函数中的自变量和因变量对换后就能得到一个新的函数，我们把这个新函数称为原来函数的反函数.

定义 1.5　设函数 $y=f(x)$ 的定义域是数集 D，值域是数集 W，若对于每个 $y\in W$，都有唯一确定的 $x\in D$，适合关系式 $f(x)=y$，那么就把此 x 值作为取定的 y 值的对应值，从而得到定义在 W 上的新函数，这个新的函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作：$x=f^{-1}(y)$. 这个

函数的定义域为W，值域为D．相对于反函数$x=f^{-1}(y)$来说，原来的函数$y=f(x)$称为直接函数（也称为原函数）．

在函数关系式$x=f^{-1}(y)$中，符号y表示自变量，符号x表示因变量．但习惯上一般用x表示自变量，y表示因变量．因此，在讨论反函数本身时，通常对调函数式$x=f^{-1}(y)$中的符号x与y，从而把它改写为$y=f^{-1}(x)$．本书后面讨论反函数时，如不特别声明，用到的反函数都是这种改写后的反函数．

例如，函数$y=x^2(x\geqslant 0)$的反函数是$x=\sqrt{y}(y\geqslant 0)$，也可以写成$y=\sqrt{x}(x\geqslant 0)$．

在坐标平面内，函数$y=f(x)$与其反函数$x=f^{-1}(y)$的图像是同一条曲线，而函数$y=f(x)$与函数$y=f^{-1}(x)$的图像关于直线$y=x$对称（见图 1-8）．

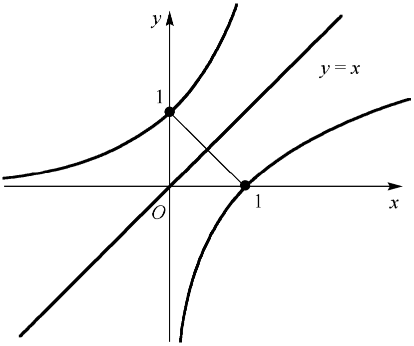


图 1-8

那么什么样的函数存在反函数呢？我们有如下的关于反函数存在性的结论．

若函数$y=f(x)$定义在某个区间I上，并在该区间上单调增加（或减少），则它的反函数必存在．

例 5　函数$y=x^2$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[0,+\infty)$．对任意的$y>0$，在$(-\infty,+\infty)$内都存在两个不同的x值，使得$x=\pm\sqrt{y}$．因此函数$y=x^2$在$(-\infty,+\infty)$内不存在反函数．但是，如果把$y=x^2$的定义域规定为$(0,+\infty)$或者$(-\infty,0)$，则对任意的$y>0$，在$(0,+\infty)$或者$(-\infty,0)$内都存在唯一一个x值，使得$x=\sqrt{y}$或者$x=-\sqrt{y}$，即函数$y=x^2$在区间$(0,+\infty)$或者$(-\infty,0)$存在反函数．显然，函数$y=x^2$在区间$(0,+\infty)$及$(-\infty,0)$都是单调的．

下面给出今后常用到的三角函数及反三角函数．

三角函数如下．

正弦函数：$y=\sin x$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

余弦函数：$y=\cos x$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

正切函数：$y=\tan x$，$x\in\left((2k-1)\dfrac{\pi}{2},(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$；

余切函数：$y=\cot x$，$x\in(k\pi,(k+1)\pi)$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$．

反三角函数如下．

反正弦函数：$y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$，$y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$；

反余弦函数：$y=\arccos x$，$x\in[-1,1]$，$y\in[0,\pi]$；

反正切函数：$y=\arctan x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$；

反余切函数：$y=\operatorname{arccot} x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in(0,\pi)$．

上述反三角函数的值域称为对应三角函数的主值区间，三角函数在各自的主值区间内都是单调的．三角函数及反三角函数的图像见本书后的附录部分．

4．复合函数

先来看一个例子．设 $y=\sin\sqrt{u}$ ，$u=x^2+1$ ，以 x^2+1 代替 $y=\sin\sqrt{u}$ 中的 u 得到 $y=\sin\sqrt{x^2+1}$，这样我们就说函数 $y=\sin\sqrt{x^2+1}$ 是由 $y=\sin\sqrt{u}$ 和 $u=x^2+1$ 构成的复合函数.

定义 1.6　设函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ ，且 $u=\varphi(x)$ 的值域或部分值域包含在 $f(u)$ 的定义域中，则通过 u，y 与 x 建立了对应关系，记为 $y=f[\varphi(x)]$，此函数是由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称为复合函数，其中 u 称为中间变量.

由定义，在进行函数复合时，要特别注意函数需要满足的条件. 如果 $u=\varphi(x)$ 的部分函数值不属于 $y=f(u)$ 的定义域，则两者不能直接复合．如 $y=\arcsin u$ ，$u=x+1(x\in R)$ ，函数 $u=x+1$ 的值域 $(-\infty,+\infty)$ 不完全在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 内，所以它们不能直接复合．但是，如果限制 $u=x+1$ 的定义域为 $[-2,0]$，则 $u=x+1$ 的值域完全在 $y=\arcsin u$ 的定义域内，此时两个函数就可以进行复合了.

复合函数也可以由两个以上的函数复合而成. 如，设函数 $y=u^2$，$u=\ln v$ ，$v=\sqrt{x}$ ，则可得复合函数 $y=\ln^2\sqrt{x}$.

例 6　将函数 $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$ 拆分为若干简单函数.

解　令 $u=\ln\sqrt{x}$，则 $y=\sqrt{u}$，再令 $v=\sqrt{x}$，则 $u=\ln v$，于是函数 $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$ 可看成是由 $y=\sqrt{u}$ ，$u=\ln v$ ，$v=\sqrt{x}$ 复合而成的.

5．初等函数

首先给出下列基本初等函数.

（1）幂函数：$y=x^{\mu}$（μ 为常数，$\mu\neq 0$）;

（2）指数函数：$y=a^x$（$a>0$ 为常数，$a\neq 1$）;

（3）对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$ 为常数，$a\neq 1$）;

（4）三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$；

（5）反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot}\, x$.

定义 1.7　由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的，且能用一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=\ln x^2$，$y=\sin(x+1)$，$y=5(x^2+1)$ 等都是初等函数.

我们见到的函数，通常情况下都是基本初等函数或初等函数.

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域.

（1）$y=\sqrt{3-x^2}$;　　（2）$y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$;

（3）$y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;　　（4）$y=\arcsin(3x-2)$.

2. 在下列各题中，$f(x)$ 和 $g(x)$ 是否表示同一函数？为什么？

（1）$f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$;

（2） $f(x)=2\ln x$ 与 $g(x)=\ln x^2$；

（3） $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$;

（4） $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $g(x)=x+1$.

3. 设 $\varphi(x)=\begin{cases} 2^x, & -1<x<0, \\ 2, & 0\leqslant x<1, \\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3. \end{cases}$　求 $\varphi(3)$，$\varphi(2)$，$\varphi(0)$，$\varphi(0.5)$，$\varphi(-0.5)$.

4. 若下面所涉及的函数都在 $(-l,\ l)$ 内有定义，证明：

（1）两个偶函数之和是偶函数，两个奇函数之和是奇函数；

（2）两个偶（奇）函数之积是偶函数，一个偶函数与一个奇函数之积是奇函数.

5. 判断下列函数的奇偶性.

（1） $f(x)=\sin(1-3x^2)$；　（2） $f(x)=2x^4(x^2-1)$；

（3） $f(x)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$；　（4） $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

6. 写出下列函数组成的复合函数，并求复合函数的定义域.

（1） $y=\arcsin u, u=1-x^2$；

（2） $y=u^3, u=\cos x$；

（3） $y=\sqrt{u}, u=\sin v, v=2x.$

7. 下列函数由哪些简单函数复合而成？

（1） $y=\sqrt{3x-1}$；　（2） $y=\arctan\sqrt{x-1}$；

（3） $y=2(x+1)^3$；　（4） $y=\cos^3\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

8. 证明函数 $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$ 是 $(-\infty,\ +\infty)$ 内的奇函数.

9. 在下列函数中哪些是周期函数？如果是周期函数，指出其最小正周期.

（1） $y=\cos\dfrac{\pi}{2}x$；　（2） $y=\tan(2-3x)$；

（3） $y=\sin^2 x$；　（4） $y=x+\sin x^2$.

10. 求下列函数的反函数.

（1） $y=\sqrt{2x+1}$；　（2） $y=\ln(1-x)$；

（3） $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$　$(ad-bc\neq 0)$；　（4） $y=2+3\sin 3x$　$\left(|x|\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$.

11. 某厂生产的产品 1000 吨，定价为每吨 130 元. 当售量不超过 700 吨时，按原定价出售；超过 700 吨的部分按原价的九折出售，试将销售收入表示成销售量的函数.

第二节　数列的极限

极限概念是微积分学中最基本的概念，整个微积分学中的概念及相关运算都主要依赖于极限概念及其运算. 所以，极限是学习微积分的基础. 本节先介绍数列的极限，第三节介绍函数的极限.

一、数列极限的概念

事实上，极限思想在我国古代就已有萌芽.《庄子 · 天下篇》就有这样的记载，“一尺之棰，日取其半，万世不竭”. 意思是说，一根一尺长的木棍，每天都截取它原来的一半，那么这根木棒永远也截不完. 显然，木棒会越来越短，以至于其长度会“无限接近于零”. 另外一个例子，就是我国古代数学家刘徽利用“割圆术”，即用圆的内接正多边形来逼近圆进而得到它的面积. 刘徽的“割圆术”简单描述如下.

设有一个圆，首先作其内接正六边形，它的面积记为 A_1；再作其内接正十二边形，它的面积记为 A_2；依以进行下去，每次边数加倍，第 n 次作的内接正多边形的边数为 $6\times 2^{n-1}$，它的面积记为 A_n $(n=1,2,3,\cdots)$. 于是，得到一个关于圆内接正多边形面积的序列：

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots,$$

显然，n 越大，内接正多边形与圆的差别就越小，从而 A_n 就越接近于圆的面积. 但另一方面，无论 n 多么大，A_n 终究是圆的内接多边形的面积，它不会和圆的面积相等. 因此，当 n 无限增大（记为 $n\to\infty$，读作 n 趋向于无穷大），即圆的内接多边形的边数无限增加时，圆的内接多边形无限接近于圆，圆的内接多边形的面积也无限接近于一个确定的常数，这个常数显然就是圆的面积. 我们把这个确定的数值称为上述面积序列（数列）$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$ 当 $n\to\infty$ 时的极限.

下面引入数列极限的概念. 先简单介绍一下数列的概念.

如果按照某一法则，有第一个数 x_1，第二个数 x_2，…，这样依次序排列着，使得对应任何一个正整数 n 有一个确定的数 x_n，那么这列有序的数 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 就叫作数列，记作：$\{x_n\}$. 数列中的每个数叫作数列的项，第 n 项 x_n 叫作数列的一般项，也可称为通项. 例如

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots;$$

$$2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots;$$

$$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots;$$

都是数列，它们的一般项分别是 $\dfrac{n+1}{n}, 2^n, (-1)^{n+1}$.

数列的概念实际上是整标函数的概念，即自变量取全体自然数，并按自然数的排列顺序变化的一种特殊函数 $x_n = f(n), n=1,2,3,\cdots$.

在数轴上，数列 $\{x_n\}$ 的每一项都有对应的点，因此数列 $\{x_n\}$ 可看成数轴上的一个动点（见图 1-9）.

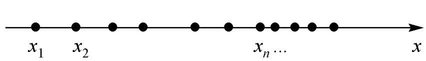


图 1-9

和前面给出的近似圆的面积的问题类似，对一般的数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 来说，如果当 n 无限增大时，对应数列的项 x_n 无限接近于某个确定的常数 a，则称常数 a 为这个数列的极限. 这一定义通常称为数列极限的描述性定义.

例如，对数列 $\{x_n\} = \left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$，如果改写一下它的通项 $x_n = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$，可以很容易看出，

当n不断增大时，$\frac{1}{n}$越来越小，从而x_n就越来越接近于常数 1．即当n无限增大时，x_n无限接近于常数1．那么，1就是当$n\to\infty$时数列$\{x_n\}=\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$的极限．又如数列$x_n=\{(-1)^{n+1}\}$，在$n\to\infty$的过程中，$x_n$反复地取值$1$和$-1$，并不接近于某个确定的常数，因此数列$x_n=\{(-1)^{n+1}\}$没有极限.

但是，仅凭观察来判断一个数列是否存在极限是很有局限性的，对一些简单的数列可以观察出其变化趋势，而对复杂的数列来说，仅凭观察很难判断出其准确的变化趋势. 特别是在进行极限问题的证明时，更不能以观察结果作为推理的依据. 所以，有必要寻求精确的数学语言对数列的极限加以定义. 仍以数列$\{x_n\}=\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$为例来深入分析“当$n\to\infty$时数列$\{x_n\}$无限接近于常数$a$”的含义.

我们知道，任意一个实数都对应数轴上一个点. 因此，两个数a与b就对应数轴上的两个点，记这两个点为A,B（见图 1-10），数a与b的接近程度就直接反映在了对应的两点A,B之间距离的大小. 而A,B之间的距离就是线段AB的长度$|AB|=|b-a|$. 所以，两个数a与b之间的接近程度可以用这两个数之差的绝对值$|b-a|$来衡量. $|b-a|$越小，对应点A,B之间的距离就越小，a与b之间就越接近.

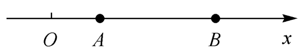


图 1-10

这样，数列$\{x_n\}=\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$无限地接近于$1$，就意味着$|x_n-1|$可以无限地变小. “可以无限地变小”指的就是小的程度没有任何限制，即无论要求$|x_n-1|$多么小，$|x_n-1|$就能变得那么小.

由于$|x_n-1|=\frac{1}{n}$，因此如果要求$|x_n-1|<\frac{1}{10}$，实际上就有$\frac{1}{n}<\frac{1}{10}$，即$n>10$. 也就是说，从第 11 项开始，以后所有的该数列的项都能满足$|x_n-1|<\frac{1}{10}$.

如果要求$|x_n-1|<\frac{1}{10^{10}}$，实际上就有$\frac{1}{n}<\frac{1}{10^{10}}$，即$n>10^{10}$. 也就是说，从第$10^{10}+1$项开始，以后所有的该数列的项都能满足$|x_n-1|<\frac{1}{10^{10}}$.

……

不能用一个具体的小正数来描述$|x_n-1|$可以任意地小，因为对任意一个小正数来说，都存在着比它更小的正数. 因此，任何确定的很小的数都不能表示$|x_n-1|$可任意地小.

通常我们用一个字母ε来表示任意给定的正数. 这样，$|x_n-1|$可任意小就等价地转化为，对任意给定的正数ε，都有$|x_n-1|<\varepsilon$成立. 对$\{x_n\}=\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$来说，有$\frac{1}{n}<\varepsilon$成立，也就是$n>\frac{1}{\varepsilon}$. 又由于$n\in\mathbf{Z}^+$，所以取正整数$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. 这样，当$n>N$时，有$|x_n-1|<\varepsilon$成立，即从$N+1$项起以后的所有项都满足不等式$|x_n-1|<\varepsilon$. 于是，得到“当$n\to\infty$时数列$\{x_n\}=\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$无限接近于常数$1$”的较精确的描述：

对于任意给定的正数ε（无论它多么小），总存在正整数N，当$n>N$时，$|x_n-1|<\varepsilon$成立.

由此，我们给出数列极限的一般定义.

定义 2.1　设有数列$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$. 如果存在常数$a$，使得对任意给定的正数$\varepsilon$（无论它多么小），总存在正整数$N$，只要$n>N$，对应的$x_n$就满足不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

那么常数a称为数列$\{x_n\}$在$n\to\infty$时的极限，或称数列$\{x_n\}$收敛于a，记作：

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,$$

或记作

$$x_n\to a(n\to\infty).$$

如果这样的常数不存在，就说数列$\{x_n\}$没有极限，或称数列$\{x_n\}$是发散的.

由于$|x_n-a|<\varepsilon$等价于$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$，因此数列$\{x_n\}$以$a$为极限的几何解释是：对任意给定的正数$\varepsilon$，存在正整数$N$，只要$n>N$，对应的$\{x_n\}$中就有无限多个点$x_{N+1}$，$x_{N+2}$，…落在区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内，而只有有限多个点$x_1$，$x_2$，…，$x_N$落在该区间外（见图 1-11）.

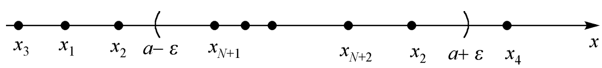


图 1-11

我们不能用上面给出的极限的定义去求数列的极限，但可以利用它来证明或验证某个常数是否为数列的极限.

例 1　设$0<|q|<1$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}q^{n-1}=0$.

证　实际上，q^{n-1}是等比数列$1,q,q^2,\cdots,q^n,\cdots$的通项. 不妨令$x_n=q^{n-1}$，则$|x_n-0|=|q|^{n-1}$，于是，对任意给定的$\varepsilon>0$，要使$|x_n-0|<\varepsilon$成立，只要

$$|q|^{n-1}<\varepsilon.$$

两边取自然对数，并注意到$0<|q|<1$，可以得到

$$n>1+\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}.$$

取$N=\left[1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$. 于是对任意的$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，当$n>N$时，就有

$$|q^{n-1}-0|<\varepsilon,$$

由极限的定义知，$\lim\limits_{n\to\infty}q^{n-1}=0$.

例 2　设$\{x_n\}=\left\{\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^3}\right\}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

证　由于$|x_n-0|=\left|\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^3}\right|=\dfrac{1}{(n+1)^3}<\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}$. 于是，对任意给定的$\varepsilon>0$，要使$|x_n-0|<\varepsilon$

成立，只要

$$\frac{1}{n}<\varepsilon\text{，或}n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. 于是对任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^3}-0\right|<\varepsilon,$$

由极限的定义知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^3}=0$.

二、数列极限的性质

定理 2.1　如果数列 $\{x_n\}$ 存在极限，那么它的极限唯一.

证　用反证法证明. 设数列 $\{x_n\}$ 有两个不同的极限 a,b，且 $a<b$. 由极限的定义，取 $\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}>0$，则当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 时，存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，下式成立

$$|x_n-a|<\frac{b-a}{2}. \tag{2.1}$$

同理，当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$ 时，存在正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时，下式成立

$$|x_n-b|<\frac{b-a}{2}. \tag{2.2}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，上述（2.1）、（2.2）两式同时成立. 由（2.1）可式得 $x_n<\dfrac{a+b}{2}$；由（2.2）式可得 $x_n>\dfrac{a+b}{2}$. 显然矛盾. 因此，数列 $\{x_n\}$ 的极限一定是唯一的.

定理 2.2　如果数列 $\{x_n\}$ 存在极限，那么它一定有界.

证　设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 由极限的定义，取 $\varepsilon=1$，则当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 时，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，下式成立

$$|x_n-a|<1.$$

因为 $|x_n|=|(x_n-a)+a|\leqslant|x_n-a|+|a|$，所以当 $n>N$ 时，$|x_n|\leqslant 1+|a|$ 成立. 取

$$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,1+|a|\},$$

则对任意的正整数 n，都有

$$|x_n|\leqslant M.$$

因此，数列 $\{x_n\}$ 有界.

定理 2.2 告诉我们，如果数列 $\{x_n\}$ 无界，则 $\{x_n\}$ 必发散. 数列有界只是它收敛的必要条件而非充分条件. 如数列 $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$ 有界，但它却不收敛.

定理 2.3　设有两个数列 $\{x_n\},\{y_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且 $a<b$. 则存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$x_n<y_n$ 成立.

证　取 $\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}>0$，仿照定理 2.1 证明，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，下面两式同时成立

$$|x_n-a|<\frac{b-a}{2}, \tag{2.3}$$

$$|y_n-a|<\frac{b-a}{2}. \tag{2.4}$$

利用（2.3）式可得 $x_n<\dfrac{a+b}{2}$，利用（2.4）式可得 $y_n>\dfrac{a+b}{2}$. 因此，当 $n>N$ 时，$x_n<y_n$ 成立.

推论　设数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，且 $a>0$，则必存在正整数 N，当 $n>N$ 时，成立 $x_n>0$.

定理 2.4　设有两个数列 $\{x_n\},\{y_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$x_n\geqslant y_n$ 成立，则必有 $a\geqslant b$.

用反证法结合定理 2.3 容易证明该结论.

推论　设有数列 $\{x_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且从某项开始有 $x_n\geqslant 0$（$x_n\leqslant 0$），则必有 $a\geqslant 0$（$a\leqslant 0$）.

定理 2.5　设数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 都收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，则有如下的运算法则成立：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a\pm b$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=ab$.

当 $b\neq 0$ 时，下式成立：

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{a}{b}$.

该定理不再给出证明.

习题 1.2

1. 下列数列中，哪些收敛？哪些发散？对收敛数列，通过观察它们的变化趋势写出其极限.

（1）$x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$；　（2）$x_n=1-\dfrac{1}{n}$；

（3）$x_n=\sin\dfrac{1}{n^2}$；　（4）$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin n$；

（5）$x_n=\dfrac{n}{1+n}$；　（6）$x_n=(-1)^{n+1}n$.

2. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2^n}\right)$；　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{3}{2n}\right)$；　（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.

3. 若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$，并举例说明反之不成立.

4. 求下列数列极限.

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$；

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$；

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$ （$|x|<1$）；

（4） $\lim\limits_{n\to\infty}0.99\cdots9$ （共有 n 个 9）.

第三节　函数的极限

前面一节讲过，数列 $\{x_n\}$ 可以看成是自变量为正整数 n 的函数，即 $x_n=f(n)$. 因此，可以认为，数列极限是函数极限的一种类型. 对一般函数 $y=f(x)$ 来说，其自变量 x 有两种变化方式，一种变化方式是 x 趋向于一个有限值 x_0，记作 $x\to x_0$，并且这种趋向指的是 x 可以任意地接近于 x_0. 另一种变化方式是 $|x|$ 无限增大，即 x 趋向于无穷大，记作 $x\to\infty$，如果是 $x>0$ 时趋向于无穷大，记作 $x\to+\infty$，称之为 x 趋向于正无穷大；如果是 $x<0$ 时趋向于无穷大，记作 $x\to-\infty$，称之为 x 趋向于负无穷大. 下面介绍在 x 的这两种变化方式下，函数 $y=f(x)$ 的极限.

仿照数列极限的描述性定义，我们先给出函数极限的描述性定义：在自变量 x 的某个变化过程中（$x\to x_0,x\to\infty,x\to+\infty,x\to-\infty$），如果对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 在自变量的这一变化过程中的极限.

一、 $x\to x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 的极限

首先要求函数 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域内有定义. 之所以要求在 x_0 的空心邻域内有定义，是因为当 $x\to x_0$ 时，x 并不等于 x_0，即 $x\neq x_0$. 下面以函数 $f(x)=3x+1$ 为例，探讨一下如何用数学语言精确地刻画出当 $x\to1$ 时，该函数以 4 为极限.

当 $x\to1$ 时，x 与 1 的接近程度可以用绝对值 $|x-1|$ 的大小来反映，$f(x)$ 与 4 的接近程度可以用绝对值 $|f(x)-4|$ 的大小来反映. $f(x)=3x+1$ 以 4 为极限，就是 $f(x)$ 无限地接近于 4，也就是要求 $|f(x)-4|$ 可以无限地小.

如，要求 $|f(x)-4|<\dfrac{1}{10}$，因为 $|f(x)-4|=3|x-1|$，因此只要 x 满足 $|x-1|<\dfrac{1}{3\cdot10}$ 就可以了. 又由于 $x\to1$ 时，x 并不等于 1，因此，x 实际上应该满足 $0<|x-1|<\dfrac{1}{3\cdot10}$，即 x 和 1 的距离只要小于 $\dfrac{1}{3\cdot10}$，就有 $|f(x)-4|<\dfrac{1}{10}$.

又如，要求 $|f(x)-4|<\dfrac{1}{10^{10}}$，同上面的讨论一样，只要 x 满足 $0<|x-1|<\dfrac{1}{3\cdot10^{10}}$，即 x 和 1 的距离只要小于 $\dfrac{1}{3\cdot10^{10}}$，就有 $|f(x)-4|<\dfrac{1}{10^{10}}$.

……

我们不可能用一个具体的小正数来描述 $|f(x)-4|$ 可以任意地小，因为对任意一个小正数来说，都存在着比它更小的正数. 因此，任何确定的很小的数都不能表示出当 x 很接近 1 时，$|f(x)-4|$ 可任意地小.

通常我们用一个字母 ε 来表示任意给定的正数. 这样，$|f(x)-4|$ 可任意小就等价地转化为，对任意给定的正数 ε，只要 $0<|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{3}$，就有 $|f(x)-4|<\varepsilon$ 成立.

于是，得到“当 $x\to 1$ 时函数 $f(x)=3x+1$ 无限接近于常数 4”的较精确的描述：

对于任意给定的正数 ε（无论它多么小），总存在某个正数 δ（在上述例子中 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$），当 $0<|x-1|<\delta$ 时，$|f(x)-4|<\varepsilon$ 成立.

由此给出一般函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限的定义.

定义 3.1 设有函数 $f(x)$，它在点 x_0 的某空心邻域内有定义，若存在常数 A，使得对于任意给定的正数 ε，都存在某正数 δ，只要 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$，就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数 A 是 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A,$$

或记作 $f(x)\to A(x\to x_0)$，也可以说 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时收敛. 如果这样的常数 A 不存在，则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 没有极限，也可以说 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时发散.

由于 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 等价于 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$，因此 A 是 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限的几何解释是：对于任意给定的正数 ε，都存在某正数 δ，当 x 接近到 x_0 一定程度而进入 x_0 的空心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，相应的函数值 $f(x)$ 就都落入以直线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$ 为边界的条形区域内（见图 1-12）.

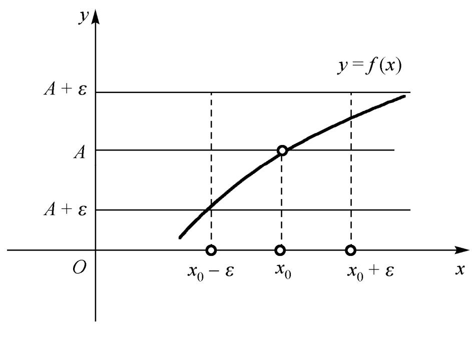


图 1-12

对上述极限定义，我们还要强调以下几点：

（1）$x\to x_0$ 时 $f(x)$ 有无极限与它在 x_0 有无定义没有关系；

（2）任意的 ε 给定后，才能确定相应的 δ，δ 是依赖于 ε 的，并且 δ 是不唯一的；

（3）在数轴上 $x\to x_0$ 的方式是任意的，它可以从 x_0 的左边趋向于 x_0，也可以从 x_0 的右边趋向于 x_0. 定义中的 $x\to x_0$ 既包含 x 从 x_0 的左边趋向于 x_0，也包含从 x_0 的右边趋向于 x_0.

例 1 利用定义证明：$\lim\limits_{x\to x_0} C=C$，其中 C 为常数.

证 由于 $|f(x)-C|=|C-C|=0$，因此对任意的正数 ε，可任取一正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，就有

$$\left|f(x)-C\right|=0<\varepsilon$$

成立，因此 $\lim\limits_{x\to x_0} C=C$.

例 2　证明：$\lim\limits_{x\to 1}(3x+1)=4$.

证　由于 $\left|f(x)-4\right|=\left|(3x+1)-4\right|=3\left|x-1\right|$，因此对任意的正数 ε，要使 $\left|f(x)-4\right|<\varepsilon$，只要 $3\left|x-1\right|<\varepsilon$，即 $\left|x-1\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$，则当 $0<\left|x-1\right|<\delta$ 时，$\left|f(x)-4\right|<\varepsilon$ 成立，由定义知 $\lim\limits_{x\to 1}(3x+1)=4$.

例 3　证明：$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=-2$.

证　由于 $\left|f(x)-(-2)\right|=\left|\dfrac{x^2-1}{x+1}+2\right|=\left|\dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1}+2\right|$，注意到 $x\to -1$，$x\neq -1$（实际上函数在 $x=-1$ 处无定义），因此可以约去上式中的因子 $x+1$，于是得到 $\left|f(x)-(-2)\right|=\left|x+1\right|$. 对任意的正数 ε，要使 $\left|f(x)-(-2)\right|<\varepsilon$，只要 $\left|x+1\right|<\varepsilon$ 即可. 取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<\left|x+1\right|<\delta$ 时，$\left|f(x)-(-2)\right|<\varepsilon$ 成立，由定义知 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=-2$.

例 4　设 x_0 是任意实数，证明：$\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

证　因为

$$|\sin x-\sin x_0|=2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=|x-x_0|,$$

因此，对任意的正数 ε，只要取正数 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ 时，

$$\left|\sin x-\sin x_0\right|\leqslant\left|x-x_0\right|<\delta=\varepsilon$$

成立，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

同样的方法，可以证明，$\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

有时需要用到 x 仅从 x_0 的某一侧趋于 x_0 时函数的极限（如考察函数在某区间端点处的极限的情形）. 若 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0，记作 $x\to x_0^-$，此时 $x<x_0$；若 x 从 x_0 的右侧趋于 x_0，记作 $x\to x_0^+$，此时 $x>x_0$. 下面给出函数的左、右极限的概念.

定义 3.2　设有函数 $f(x)$，它在点 x_0 的某空心邻域内有定义，若存在常数 A，使得对于任意给定的正数 ε，都存在某正数 δ，只要 x 满足 $x_0-\delta<x<x_0$，就有

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$$

成立，则称常数 A 是 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\text{，或 }f(x_0^-)=A.$$

定义 3.3　设有函数 $f(x)$，它在点 x_0 的某空心邻域内有定义，若存在常数 A，使得对于任意给定的正数 ε，都存在某正数 δ，只要 x 满足 $x_0<x<x_0+\delta$，就有

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$$

成立，则称常数 A 是 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A\text{，或 } f(x_0^+)=A.$$

左极限、右极限统称为单侧极限.

由定义 3.1、定义 3.2 及定义 3.3 不难得到如下结论.

定理 3.1　函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限与右极限都存在且相等，即有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \text{左极限 } f(x_0^-) \text{ 与右极限 } f(x_0^+) \text{ 都存在，且 } f(x_0^-)=f(x_0^+)=A.$$

例 5　设函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，证明：$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

证　由于 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases}1, x>0;\\ -1, x<0\end{cases}$. 因此

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1\text{；}$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}1=1.$$

因此 $f(0^-)\neq f(0^+)$，由定理 3.1 知道，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

例 6　证明：$\lim\limits_{x\to 0^+} a^x=1$，其中 $a>0$，但 $a\neq 1$.

证　先证 $a>1$ 时结论成立. 此时当 $x>0$ 时，有 $a^x>1$. 所以，对任给的 $\varepsilon>0$，要使 $|a^x-1|<\varepsilon$ 成立，就是 $0<a^x-1<\varepsilon$，或 $0<a^x<\varepsilon+1$ 成立，即 $0<x<\log_a(1+\varepsilon)$. 取 $\delta=\log_a(1+\varepsilon)$，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<x<\delta$ 时就有 $|a^x-1|<\varepsilon$ 成立，即

$$\lim_{x\to 0^+} a^x=1.$$

当 $0<a<1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^+} a^x=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\frac{1}{a}}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{a}\right)^x}$，由于此时 $0<a<1$，故 $\dfrac{1}{a}>1$. 从而由已证得的 $a>1$ 时的结论知，

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{a}\right)^x=1.$$

综上可得 $\lim\limits_{x\to 0^+} a^x=1$，其中 $a>0$，但 $a\neq 1$.

例 7　证明：$\lim\limits_{x\to 0^-} a^x=1$，其中 $a>0$，但 $a\neq 1$.

证　此时 $x<0$，令 $x=-t$，则当 $x\to 0^-$ 时，$t\to 0^+$. 因此，利用例 6 的结论，有

$$\lim_{x\to 0^-} a^x=\lim_{t\to 0^+} a^{-t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{a^t}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0^+} a^t}=1.$$

注：例 6 和例 7 的证明过程中，处理 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}=\dfrac{1}{\lim\limits_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{a}\right)^x}\left(\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{a^t}=\dfrac{1}{\lim\limits_{t\to 0^+} a^t}\right)$ 时，利用了本

节后面的定理 3.6 中（3）的结论.

例 8　证明：$\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$，其中 $a>0$，但 $a\neq 1$.

证　由上述两个例题知道，$\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$.

由于 $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = \lim\limits_{x\to x_0}\left(a^{x_0}\cdot a^{x-x_0}\right) = \lim\limits_{x\to x_0} a^{x_0}\cdot \lim\limits_{x\to x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0}\lim\limits_{x\to x_0} a^{x-x_0}$.

对极限 $\lim\limits_{x\to x_0} a^{x-x_0}$，令 $t=x-x_0$，则当 $x\to x_0$ 时，有 $t\to 0$，而 $\lim\limits_{t\to 0} a^t = 1$，因此 $\lim\limits_{x\to x_0} a^{x-x_0} = 1$.
于是就有

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}\cdot \lim_{x\to x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0}.$$

二、 $x\to\infty$ 时函数 $y=f(x)$ 的极限

前面在讨论数列 $\{x_n\}$ 的极限时，其自变量 n 是离散地取正整数而趋向于无穷. 下面讨论函数 $f(x)$ 在其自变量 x 连续变化而趋向于无穷时（$x\to\infty$）的极限. 我们假定，函数 $f(x)$ 在原点的某邻域外有定义. 仿数列极限的定义，可以给出如下定义.

定义 3.4　设函数 $f(x)$ 在原点的某邻域外有定义，如果存在常数 A，使得对于任意给定的正数 ε，都存在某正数 X，只要 x 满足 $|x|>X$，就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数 A 是 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A,$$

或记作 $f(x)\to A(x\to\infty)$，也可以说 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时收敛. 如果这样的常数 A 不存在，则称 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 没有极限，也可以说 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时发散.

$x\to\infty$ 包含 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 两种情形. 在定义 3.4 中把 $|x|>X$ 改为 $x>X$ 可以得到 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限的定义；把 $|x|>X$ 改为 $x<-X$ 可以得到 $x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$ 以 A 为极限的定义.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 的几何意义是，当 $|x|>X$ 时，函数 $f(x)$ 的图像位于两直线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$ 之间，如图 1-13 所示.

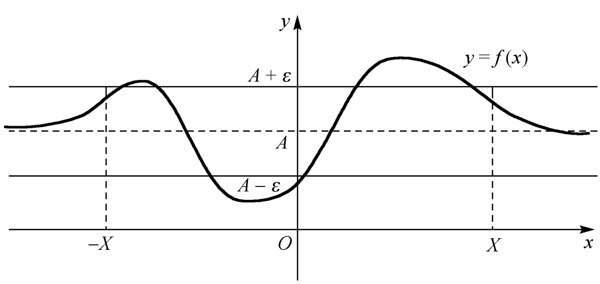


图 1-13

例 9　证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^k} = 0$，其中 k 为正整数.

证　由定义 3.4，只要证出对任意的 $\varepsilon>0$，总存在正数 X，当 $|x|>X$ 时，有 $\left|\dfrac{1}{x^k}-0\right|<\varepsilon$ 即可.

由于 $\left|\dfrac{1}{x^k}-0\right|=\dfrac{1}{|x|^k}$，因此对任意的 $\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{1}{x^k}-0\right|<\varepsilon$ 成立，只需 $\dfrac{1}{|x|^k}<\varepsilon$，即 $|x|>\dfrac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$ 成立就可以了. 取 $X=\dfrac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$，则对任意的 $\varepsilon>0$，总存在正数 X，当 $|x|>X$ 时，有 $\left|\dfrac{1}{x^k}-0\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^k}=0$.

三、函数极限的性质

函数极限与数列极限有一些性质是相同的，如都具有唯一性、局部保序性等. 下面以 $x\to x_0$ 时的极限为例给出函数极限的性质，这些性质对自变量以其他方式变化时对应的极限仍然成立.

定理 3.2 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则该极限唯一.

定理 3.3 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则必存在常数 m,M 及某正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

这一性质我们通常称为函数极限的有界性.

证 由已知，设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则由极限定义知，对 $\varepsilon=1$，存在某正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<1$，即 $-1\leqslant f(x)-A\leqslant 1$，也就是 $A-1\leqslant f(x)\leqslant A+1$. 取 $m=A-1,M=A+1$，则有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 成立.

定理 3.4 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$， $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，并且 $A>B$. 则必存在某正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>g(x)$ 成立.

这一性质通常称为函数极限的局部保序性.

推论 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$（或 <0），则必存在某正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 <0）成立.

这一性质通常称为函数极限的局部保号性.

定理 3.5 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$， $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且存在某正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)\geqslant g(x)$（$f(x)\leqslant g(x)$），则有 $A\geqslant B$（$A\leqslant B$）成立.

推论 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且存在某正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)\geqslant 0$（或 $\leqslant 0$），则有 $A\geqslant 0$（或 $\leqslant 0$）成立.

下面给出函数极限的四则运算法则.

定理 3.6 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$， $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则有如下的运算法则成立：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$.

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=AB$.

当 $B\neq 0$ 时，下式成立：

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

在运算法则（2）中，若 $f(x)=g(x)$，则有

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot f(x)\right]=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}f(x)=\left[\lim_{x\to x_0}f(x)\right]^2.$$

更进一步还可以得到

$$\lim_{x\to x_0}f^n(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdots\lim_{x\to x_0}f(x)=\left[\lim_{x\to x_0}f(x)\right]^n.$$

另外，在运算法则（2）中，若 $g(x)=k$， $k\neq 0$ 为常数，则有

$$\lim_{x\to x_0}\left[kf(x)\right]=\lim_{x\to x_0}k\cdot\lim_{x\to x_0}f(x)=k\lim_{x\to x_0}f(x).$$

例 10　求极限求 $\lim\limits_{x\to 1}(5x^2+3x-1)$.

解　由极限的四则运算法则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(5x^2+3x-1)&=\lim_{x\to 1}5x^2+\lim_{x\to 1}3x-\lim_{x\to 1}1=5\lim_{x\to 1}x^2+3\lim_{x\to 1}x-1\\&=5(\lim_{x\to 1}x)^2+3\times 1-1=5\times 1^2+3\times 1-1=7.\end{aligned}$$

这个例子告诉我们，对多项式函数

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\quad(a_0\neq 0),$$

有

$$\lim_{x\to x_0}P_n(x)=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+a_2x_0^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x_0+a_n=P_n(x_0).$$

例 11　求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x+1}$.

解　由于分母的极限 $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2\neq 0$，因此可以直接利用定理 3.5，即有

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2-2\lim\limits_{x\to 1}x+1}{\lim\limits_{x\to 1}x+1}=\frac{0}{2}=0.$$

例 12　求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$.

解　由于分母的极限 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，因此不能直接利用定理 3.6 的（3），在这里我们的处理方法是分子、分母同时消去当 $x\to 1$ 时使分母为零的因子，即 $x-1$，这样就有

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}=\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+2)=3.$$

最后，给出关于复合函数求极限的结论.

定理 3.7　设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$. 又函数 $y=f(u)$ 在点 $u=a$ 有定义且 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=f(a)$. 则复合函数 $y=f\left[\varphi(x)\right]$ 当 $x\to x_0$ 时存在极限，且

$$\lim_{x\to x_0}f\left[\varphi(x)\right]=f(a).\tag{3.1}$$

由于 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，因此（3.1）式又可以表示为

$$\lim_{x\to x_0} f\left[\varphi(x)\right]=f\left[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\right].$$

上式表明，在定理 3.7 的条件成立下，求复合函数 $y=f\left[\varphi(x)\right]$ 的极限时，函数符号 f 可以与极限符号 $\lim\limits_{x\to x_0}$ 交换次序.

例 13　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}$.

解　令 $u=\dfrac{1}{x}$，则 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 可以看作是由函数 $y=\sin u,u=\dfrac{1}{x}$ 复合而成的. 又

$$\lim_{x\to\infty}u=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,$$

$$\lim_{u\to 0}\sin u=\sin 0=0,$$

于是，由定理 3.7，得到

$$\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=\lim_{u\to 0}\sin u=0.$$

习题 1.3

1. 求下列数列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$；

（3）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$；

（5）$\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x^2-2x+1}$；

（6）$\lim\limits_{x\to -1}\cos(2x+1)$；

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}\cos\dfrac{1}{x}$；

（8）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$；

（9）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$；

（10）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\ (a>0)$；

（11）$\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)(1+\mathrm{e}^{-x})\right]$；

（12）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 1,\\ ax+1, & x>1.\end{cases}$ 求 a 的值，使得 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在.

3. 设 $f(x)=\dfrac{|x|-x}{x}$，求 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，并问 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是否存在？

4. 设 $f(x)=\begin{cases}3x, & -1<x<1\\ 8, & x=1\\ 3x^2, & 1<x<4\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

5. 若极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+xf(x)}-1}{2x}=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

第四节　极限存在准则与两个重要极限

本节介绍两个判断极限存在的准则以及由它们推导出来的两个重要极限，这两个极限在计算函数极限时有着重要作用.

一、夹逼准则

首先给出数列极限对应的夹逼准则.

定理 4.1　设数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足

（1）存在某正整数N_1，当$n>N_1$时，有$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

则有

$$\lim_{n\to\infty}y_n=a.$$

证　由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$知，对任意的$\varepsilon>0$，都存在某正整数$N$（取$N>N_1$），当$n>N$时，下式成立

$$|x_n-a|<\varepsilon,\quad |z_n-a|<\varepsilon.$$

即下面两式同时成立

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon,\quad a-\varepsilon<z_n<a+\varepsilon.$$

再利用条件（1）可得，$a-\varepsilon<x_n\leqslant y_n\leqslant z_n<a+\varepsilon$，也就是$n>N$时，下式成立

$$a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon,$$

或

$$|y_n-a|<\varepsilon,$$

因此，有

$$\lim_{n\to\infty}y_n=a.$$

下面再给出函数极限的夹逼准则.

定理 4.2　设函数$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$满足

（1）当$x\in\mathring{U}(x_0)$（或$|x|>X$）时，有如下关系式成立

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x);$$

（2）$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$.

则有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A.$$

该定理可仿定理 4.1 证明.

例 1　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n^2}\right)$.

解　设 $y_n = n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n^2}\right)$，取 $x_n=\dfrac{n^2}{n+n^2}$， $z_n=\dfrac{n^2}{1+n^2}$，则有

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$，所以由定理 4.1 知 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$，即

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n+n^2}\right)=1.$$

下面利用夹逼准则来证明第一个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

首先，函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的定义域为非零实数集. 在如图 1-14 所示的单位圆中，设圆心角 $\angle AOB = x$（$0<x<\dfrac{\pi}{2}$），点 A 处的切线与 OB 的延长线相交于 D，且作 $BC\perp OA$，因此有

$$\sin x = |BC|,\quad x=\overset{\frown}{AB},\quad \tan x = |AD|.$$

由于$\triangle AOB$ 的面积<圆扇形 AOB 的面积<$\triangle AOD$ 的面积，即有

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x,$$

也就是

$$\sin x < x < \tan x.$$

上式除以 $\sin x$ 可得：$1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$，即有

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{4.1}$$

如果 $x<0$，则 $-x>0$，则根据前面的推导过程可知，$\cos(-x)<\dfrac{\sin(-x)}{-x}<1$，由于 $\cos(-x)=\cos x$，$\sin(-x)=-\sin x$，因此（4.1）式仍然成立.

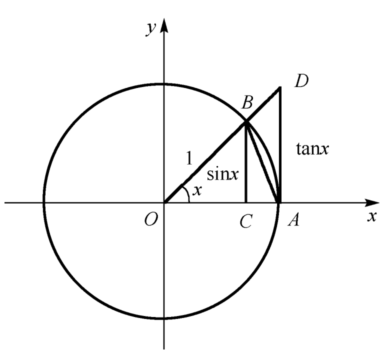


图 1-14

由上节的例 4 知，$\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$，而 $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$，因此对（4.1）式由定理 4.2 知，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

例 2　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

例 4　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x^2}$.

解　令 $t=\arctan x$，则 $x=\tan t$，且当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$．于是
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\tan t}{t}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}}=\frac{1}{1}=1.$$

同理可求得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$.

一般地，对第一个重要极限，可作如下推广：
$$\lim_{u(x)\to 0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1.$$

二、单调有界收敛准则

前面在讨论数列极限的性质时指出，收敛数列必定有界，但有界并不能保证数列收敛．如果再给有界数列加上一条件，那么它就一定收敛了．

我们先介绍单调数列的概念．

如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件
$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots,$$
则称它是单调增加的．如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件
$$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\cdots,$$
则称它是单调减少的．

单调增加数列与单调减少数列统称为单调数列．

定理 4.3　单调有界数列必有极限．

对该定理我们不再证明，只给出它的几何解释．

假定数列 $\{x_n\}$ 单调增加，则从数轴上来看，任意一项总排在它前面一项的右边．因此，随着 n 的增大，对应的项在数轴上由左向右按顺序排列．当 $n\to\infty$ 时，对应的项 x_n 要么沿数轴移向无穷远，要么沿数轴无限接近于某个定点（常数）．又由于 $\{x_n\}$ 有界，因此第一种情形不会发生．这样 x_n 只能趋向于某个常数，即 $\{x_n\}$ 存在极限（见图 1-15）．

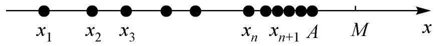


图 1-15

利用单调有界收敛准则，我们可以推出第二个重要极限：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

先证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在. 设 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，下面证明 x_n 单调增加且有界. 对 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 利用二项式展开公式可得

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$
$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

同理有

$$x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+2}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+2}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

由上述两个展开式容易看出，两式中的每一项都大于零，除了前两项以外，x_n 的每一项都小于 x_{n+1} 的对应项，并且 x_{n+1} 还多出一项，因此有

$$x_{n+1}>x_n.$$

所以，数列 $\{x_n\}$ 单调增加. 下面再证 $\{x_n\}$ 有界. 由上面 x_n 的展开式不难得到下面的不等式

$$x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

因此，数列 $\{x_n\}$ 有界.

由定理 4.3 知，数列 $\{x_n\}$ 存在极限，记这个极限为 e $(\mathrm{e}=2.71828\cdots)$，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

可以进一步证明，当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时，函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的极限都存在且等于 e. 因此，

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.\qquad(4.2)$$

若令 $t=\frac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to0$，这样（4.2）式又可以表示为

$$\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}.$$

例 5　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}}\right)^{2}=\dfrac{1}{e^{2}}$.

例 6　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(x+1)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1$.

一般地，对第二个重要极限，我们可以作如下推广：

$$\lim_{u(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e,$$

或

$$\lim_{v(x)\to 0}(1+v(x))^{\frac{1}{v(x)}}=e.$$

例如，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x}=e$，$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}=e$.

习题 1.4

1. 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\tan 2x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$.

2. 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$；

（5）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})$；　　（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x+3}$；

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n}$；　　（8）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{3+n}$.

3. 用极限存在准则求下列极限.

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[m]{1+\dfrac{1}{n}}=1$，其中 m,n 为正整数；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a+n^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2a+n^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{na+n^2}}\right)$　（$a>0$）.

第五节　无穷小量与无穷大量

无穷小量与无穷大量是微积分知识中两个特殊而又很重要的概念，特别是无穷小量，它在计算函数极限时有着很重要的作用.

一、无穷小量

下面以 $x \to x_0$ 为例给出无穷小量的定义，该定义对自变量的其他变化趋势同样成立.

定义 5.1　如果函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时以零为极限，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，则称 $f(x)$ 为在 $x \to x_0$ 时的无穷小量. 无穷小量简称无穷小.

例如，由于 $\lim\limits_{x \to 2}(x-2)=0$，因此函数 $x-2$ 是 $x \to 2$ 时的无穷小；由于 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$，因此 $\dfrac{1}{n}$ 是 $n \to \infty$ 时的无穷小.

对无穷小要注意以下两点：

（1）无穷小量是一个变量，而不是一个数. 一个绝对值很小的数，如 10^{-10}，并不是无穷小. 但 0 是唯一可以作为无穷小的常数，因为它的极限在任何情况下都是 0.

（2）无穷小量与自变量的变化趋势有密切关系. 函数在自变量的某一变化过程中是无穷小，但在自变量的另一变化过程中可能就不是无穷小了. 如 $f(x)=\sin x$，当 $x \to 0$ 时它是无穷小，但当 $x \to \dfrac{\pi}{2}$ 时就不是无穷小了.

下面的定理告诉我们，无穷小与函数极限有密切关系.

定理 5.1　当 $x \to x_0$ 时，极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$，其中 α 是 $x \to x_0$ 时的无穷小，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha .$$

该定理对自变量的其他变化过程仍然成立.

证　必要性. 令 $f(x) - A = \alpha$，由 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 可得

$$\lim_{x \to x_0} \alpha = \lim_{x \to x_0}\left[f(x) - A\right] = \lim_{x \to x_0} f(x) - A = A - A = 0 .$$

因此，α 是 $x \to x_0$ 时的无穷小量，且由 $f(x) - A = \alpha$ 知 $f(x) = A + \alpha$.

充分性. 已知 $f(x) = A + \alpha$，α 是 $x \to x_0$ 时的无穷小，则有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0}(A + \alpha) = A + \lim_{x \to x_0} \alpha = A .$$

二、无穷小量的运算性质

我们以 $x \to x_0$ 为例介绍无穷小量的运算性质，这些性质对自变量的其他变化趋势同样成立.

定理 5.2　设 α，β 是 $x \to x_0$ 时的无穷小量，即 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$，$\lim\limits_{x \to x_0} \beta = 0$. 则 $\alpha \pm \beta$，$\alpha \cdot \beta$ 仍然是 $x \to x_0$ 时的无穷小，即 $\lim\limits_{x \to x_0}(\alpha \pm \beta) = 0$，$\lim\limits_{x \to x_0}(\alpha \cdot \beta) = 0$.

利用函数极限的性质容易证明该定理.

实际上，上述定理对有限个无穷小的和、差及乘积都是成立的，即有限个无穷小的和、差、乘积仍为无穷小.

定理 5.3　无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量.

证　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta_2)$ 内有界，即存在正数 M，使得对一切的 $x\in U(x_0,\delta_2)$，都有

$$|f(x)|\leqslant M. \tag{5.1}$$

又设 α 为 $x\to x_0$ 时的无穷小，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$，从而对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，有

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}. \tag{5.2}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，(5.1)、(5.2) 两式同时成立. 从而有

$$|\alpha f(x)|=|\alpha|\cdot|f(x)|<\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha f(x)=0$，即 $\alpha\cdot f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小.

如 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小，而 $\sin x,\cos x,\arctan x$ 都是有界函数，因此由上面的定理知道，$x\to\infty$ 时，$\dfrac{\sin x}{x},\dfrac{\cos x}{x},\dfrac{\arctan x}{x}$ 都是无穷小. 又如，$x\to 0$ 时，x 为无穷小量，而 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界的，因此 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 仍是 $x\to 0$ 时的无穷小，即 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

推论　常数与无穷小量的乘积仍是无穷小量.

三、无穷小量的比较

由定理 5.2 我们知道，两个无穷小的和、差、乘积仍为无穷小. 那么两个无穷小的商的极限是什么呢？先来看下面简单的例子.

当 $x\to 0$ 时，$x,2x,x^2$ 及 $\sin x$ 都是无穷小量，但对它们的商取极限却有：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

因此，无穷小商的极限会有多种情形存在. 这实际上也反映了不同的无穷小趋向于零的“速度”快慢是不一样的. 就上面的例子来说，当 $x\to 0$ 时，$x\to 0$ 的速度基本上是 $2x\to 0$ 的速度的 2 倍；$x^2\to 0$ 的速度要比 $x\to 0$ 的速度快得多；$x\to 0$ 与 $\sin x\to 0$ 的速度几乎相当.

对无穷小进行比较，实际上就反映了在自变量的同一变化过程中，不同的无穷小趋向于零的速度的快慢.

定义 5.2　设 α,β 是自变量同一变化过程中的无穷小，且 $\alpha\neq 0$.

（1）如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小（也可以称 α 是比 β 低阶的无穷小），记作 $\beta=o(\alpha)$；

（2）如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$，则称 β 与 α 是同阶无穷小；

（3）如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=C\neq 0$，则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小，其中 k 是正实数；

（4）如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

下面给出几个具体的例子.

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$，因此 $x\to 0$ 时，x^2 是比 x 高阶的无穷小，即 $x^2=o(x)(x\to 0)$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，因此 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 与 x 是等价无穷小，即 $\sin x\sim x(x\to 0)$.

由于 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$，因此 $x\to 1$ 时，x^2-1 与 $x-1$ 是同阶无穷小.

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=1$，因此 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 与 x^2 是同阶无穷小，还可以看作是 x 的二阶无穷小，且与 $\frac{1}{2}x^2$ 是等价无穷小.

例 1　证明：当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$.

证

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+x})^n-1}{\frac{1}{n}x[\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1]}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{n}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1}\\&=1.\end{aligned}$$

因此，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x(x\to 0)$.

必须注意的是，等价无穷小不一定相等. 下面的定理反映了等价无穷小之间的一种关系.

定理 5.4　α 与 β 是等价无穷小的充分必要条件是

$$\beta=\alpha+o(\alpha).$$

证　必要性. 设 $\alpha\sim\beta$，则 $\lim\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim\frac{\beta}{\alpha}-1=1-1=0$. 所以，$\beta-\alpha=o(\alpha)$，即

$$\beta=\alpha+o(\alpha).$$

充分性. 设 $\beta=\alpha+o(\alpha)$，则 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\alpha+o(\alpha)}{\alpha}=\lim\left(1+\frac{o(\alpha)}{\alpha}\right)=1$，因此，$\alpha\sim\beta$.

四、等价无穷小量的应用

等价无穷小在求函数极限时有着非常重要的应用，利用它有时可以很方便地简化计算.

定理 5.5　设在自变量的某一变化过程中，α，α'，β，β' 都是无穷小量，且 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，$\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则有

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

证

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\left(\frac{\beta}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}\right)=\lim\frac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\lim\frac{\alpha'}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

这个定理告诉我们，在求两个无穷小商的极限时，分子和分母都可以用各自的等价无穷小来代替. 这就是所谓的利用等价无穷小求函数极限的方法.

综合前面的讨论，下面给出几组今后会经常用到的等价无穷小. 当 $x\to0$ 时，有 $\sin x\sim x$；$\tan x\sim x$；$\arcsin x\sim x$；$\arctan x\sim x$；$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$；$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$；$\ln(1+x)\sim x$.

例 2　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$.

解　由于 $x\to0$ 时，$\tan 2x\sim 2x$，$\sin 3x\sim 3x$. 因此

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

例 3　求 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$.

解　由于 $x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，所以当 $x\to\infty$ 时，$1-\cos\dfrac{1}{x}\sim\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}\right)^2=\dfrac{1}{2x^2}$. 因此

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2}.$$

例 4　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{1-\cos x}$.

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x\sin x}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

特别需要注意的是，在利用等价无穷小计算函数极限时，如果分子或分母是几项之和或之差，则一般不能对其中某一项进行等价无穷小的代换.

例 5　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{(\arcsin x)^3}$.

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{(\arcsin x)^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

如果将分子中的 $\tan x,\sin x$ 都用它们的等价无穷小 x 代换下来，则会得到错误的结果：

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{(\arcsin x)^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=0.$$

五、无穷大量

如果当 $x \to x_0$ 或 $x \to \infty$ 时，对应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷大量. 一般地，有如下定义.

定义 5.3 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义（或 $|x|$ 大于某一正数时有定义）. 如果对于任意给定的正数 M（不论它多么大），总存在正数 δ（或正数 X），使得当 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>X$）时，对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式 $|f(x)|>M$，则称函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时为无穷大量，简称无穷大.

由函数极限的定义知道，无穷大量是极限不存在的量. 但习惯上为了表述的方便，通常也称它的极限为无穷大，并记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty\ (\text{或} \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty).$$

在无穷大的定义中，如果把 $|f(x)|>M$ 换成 $f(x)>M$ (或 $f(x)<-M$)，则称函数 $f(x)$ 为 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的正无穷大（或负无穷大）. 记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty\ (\text{或} \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty).$$

对无穷大还需要注意的是，无穷大不是很大的数，不能将它和很大的数等同起来；无穷大是一种特殊的无界变量，但是无界变量未必是无穷大. 比如，数列 $1,0,2,0,\cdots,n,0,\cdots$ 是无界的，但它不是 $n \to \infty$ 时的无穷大.

下面给出无穷小量与无穷大量间的关系. $x \to 0$ 时，x 为无穷小量，而 $\dfrac{1}{x} \to \infty$，即 $\dfrac{1}{x}$ 为 $x \to 0$ 时的无穷大量. 一般地，有如下定理.

定理 5.6 在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大 .

该定理的证明略去.

例 6 求下列极限：

（1）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$； （2）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$；（3）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}$.

解 （1）原式分子、分母同时除以 x^3 可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{3}{7}.$$

（2）原式分子、分母同时除以 x^3 可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}=\frac{0}{2}=0.$$

（3）由（2）知，$\dfrac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}$ 的倒数的极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=0$，即 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}$ 是无穷小，因此由定理 5.6 知，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}=\infty .$$

例 6 的结果可推广到一般有理函数的情形，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当} n=m,\\ 0, & \text{当} n>m,\\ \infty, & \text{当} n<m.\end{cases}$$

其中，$a_0\ne 0,b_0\ne 0$，m 和 n 为非负整数.

例 7　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

解　当 $n\to\infty$ 时，括号里和式的项数也是趋向于无穷多项，因此不能直接利用极限的运算法则. 我们的方法是，先对括号里的式子求和，再取极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

习题 1.5

1. 下列函数在自变量怎样的变化趋势下为无穷小量？又在怎样的变化趋势下为无穷大量？

（1）$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$；　　（2）$f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$.

2. 观察下列各题中，哪些是无穷小量？哪些是无穷大量？

（1）$\dfrac{1+2x}{x}$（$x\to 0$ 时）；　（2）$\dfrac{1+2x}{x^2}$（$x\to\infty$ 时）；　（3）$\sin 2x$（$x\to 0$ 时）；

（4）e^{-x}（$x\to+\infty$ 时）；　（5）$3^{\frac{1}{x}}$（$x\to 0^-$ 时）；　（6）$\dfrac{(-1)^n}{3^n}$（$n\to\infty$ 时）.

3. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$，则当 $x\to$ ________ 时 $f(x)$ 为无穷小，当 $x\to$ ________ 时 $f(x)$ 为无穷大.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}=$ ________.

5. 当 $x\to 0$ 时，与 $2x^2+x^4$ 为同阶无穷小的是（　　）.

（A）x　　（B）x^2　　（C）x^3　　（D）x^4

6. 当 $x\to x_0$ 时，α 和 β 都是无穷小量，下列变量中，可能不是无穷小量的是（　　）.

（A）$\alpha+\beta$　　（B）$\alpha-\beta$　　（C）$\alpha\beta$　　（D）$\dfrac{\alpha}{\beta}(\beta\ne 0)$

7. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=$（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）4

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{1-x^2}=$（　　）.

（A）$-\dfrac{1}{2}$　　（B）0　　（C）1　　（D）$\dfrac{1}{2}$

9. 当 $x\to 0$ 时，$x+x^2$ 与 x^2+x^3 相比，哪一个是高阶无穷小？

10. 求下列函数的极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}$；　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$；　（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$；　（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}$；　（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^n x}{\sin x^m}$（$m$，$n\in N^+$）.

11. 求下列函数的极限.

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x+\cos x}{x^2}$；　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2}{x^3-3x^2+4}$；　（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}+n}{n+1}$；　（5）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$；　（6）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$；

第六节　函数的连续性与间断点

我们周围的很多现象，如气温的变化、冰雪的消融、动植物的生长等，都是随时间而连续变化的. 把这种现象用函数关系表示出来，反映的就是函数的连续性. 函数的连续性是微积分学中的重要概念，后面很多内容都会用到函数的连续性.

一、函数连续的概念

在给出函数连续概念之前我们引入增量的概念.

设变量 u 初始值为 u_1，终值为 u_2，称终值与初值的差 u_2-u_1 为变量 u 的增量，记作 Δu，即 $\Delta u=u_2-u_1$. 这里需要注意的是，Δu 虽称为增量，但它不是只取正值，也可以取负值. 当 $\Delta u>0$ 时，u 是增加的；当 $\Delta u<0$ 时，u 是减少的.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义. 当自变量 x 在该邻域内从 x_0 取得增量 Δx 而变成 $x=x_0+\Delta x$ 时，相应的函数值也由 $f(x_0)$ 变为 $f(x_0+\Delta x)$，即函数 $y=f(x)$ 也取得了增量，其增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0).$$

上式的几何解释见图 1-16.

下面给出函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义.

定义 6.1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果当自变量 x 的增量 Δx 趋于零时，对应的函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也趋于零，即有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

由于 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta x=x-x_0$，相应地函数值的改变量可写为 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$. 因此，当 $\Delta x\to 0$，即 $x\to x_0$ 时，有 $\Delta y\to 0$，即

$$f(x)-f(x_0)\to 0,$$

也即 $f(x)\to f(x_0)$，于是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续的定义又可记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

即，若函数在一点处的极限值等于函数在该点处的函数值，则函数在这一点是连续的.

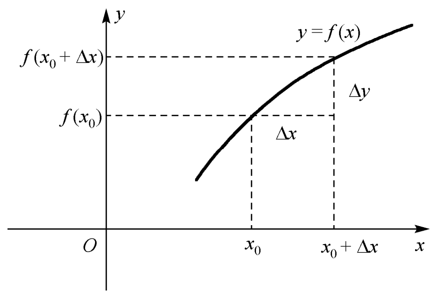


图 1-16

明显地，函数在一点连续的概念是利用极限来定义的. 由极限中单侧极限，即左、右极限的概念，也可以得到函数在一点单侧连续的概念.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 左连续；若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 右连续.

由此可知，函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 既左连续，又右连续，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)=\lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

例 1　设函数

$f(x)=\begin{cases} x-1, & -2<x<0, \\ x+1, & 0\leqslant x\leqslant 3. \end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解　该函数是分段函数，$x=0$ 是其分段点. 易知 $f(0)=1$，又

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1,$$

因此，该函数在 $x=0$ 处右连续，但不左连续，从而它在 $x=0$ 处不连续.

若函数 $f(x)$ 在某区间上的每一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在该区间上连续，或称 $f(x)$ 为该区间上的连续函数.

需要注意的是，若函数 $f(x)$ 在包含区间端点的闭区间上连续，那么在端点处的连续性只能是单侧连续，即在左端点处右连续，在右端点处左连续. 比如，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续是指，函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续，在端点 a 处右连续，在端点 b 处左连续，即有

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a),\quad \lim_{x\to b^-} f(x)=f(b).$$

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

例 2 证明：函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

证 设 x_0 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的任意一点，由于

$$\Delta y=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

所以有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(2\cdot\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)=0\,.$$

因此函数 $y=\sin x$ 在点 x_0 处连续. 由于 x_0 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的任意一点，故函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

同理可以证明，函数 $y=\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内也是连续的.

例 3 设 a 为实数，函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, x>0\\ x+a, x\leqslant 0\end{cases}$，则当 a 为何值时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续？

解 由函数 $f(x)$ 的表达式可得，$f(0)=a$. 下面计算 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左右极限.

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+a)=a\,;\quad f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^3=0\,.$$

当函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续时，应有

$$f(0^-)=f(0^+)=f(0)\,,$$

即 $a=0$. 因此，当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

二、函数的间断点

首先给出函数间断点的定义.

定义 6.2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，如果函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一：

（1）在 $x=x_0$ 没有定义；

（2）虽在 $x=x_0$ 有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

（3）虽在 $x=x_0$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，而点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

下面通过具体的例子，说明函数间断点的几种常见类型.

例 4 函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在点 $x=1$ 没有定义，因此点 $x=1$ 是它的间断点. 但

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2\,.$$

因此，如果补充函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在点 $x=1$ 有定义，即令 $x=1$ 时，$y=2$. 那么函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在点 $x=1$ 处就连续了. 称点 $x=1$ 为函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的可去间断点（见图 1-17）.

例 5　设函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0. \end{cases}$

由于
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1\text{，}\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1.$$
因此，函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的左右极限都存在，但不相等，这样函数在 $x=0$ 就不连续. 所以 $x=1$ 是函数的间断点. 由于函数的图像在 $x=0$ 处产生跳跃现象，我们称 $x=0$ 为函数的跳跃间断点（见图 1-18）.

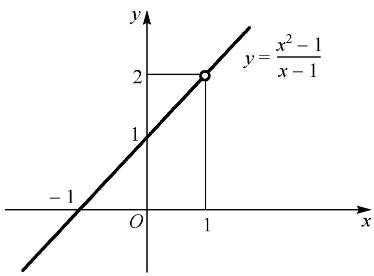


图 1-17

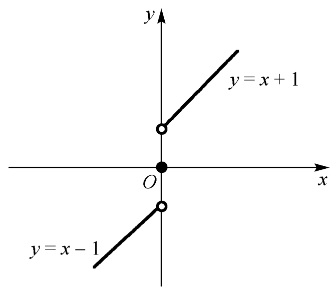


图 1-18

例 6　正切函数 $y=\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处没有定义，因此点 $x=\frac{\pi}{2}$ 是它的间断点（见图 1-19）. 由于
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty\text{，}$$
因此，称点 $x=\frac{\pi}{2}$ 是函数 $y=\tan x$ 的无穷间断点.

例 7　函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 没有定义，因此函数在 $x=0$ 不连续，即 $x=0$ 是 $y=\sin\frac{1}{x}$ 的间断点（见图 1-20）. 当 $x\to 0$ 时，$y=\sin\frac{1}{x}$ 在 1 和 -1 之间来回反复取值，称 $x=0$ 为 $y=\sin\frac{1}{x}$ 的震荡间断点.

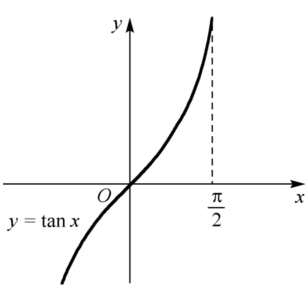


图 1-19

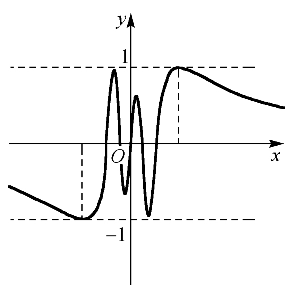


图 1-20

通常我们又把间断点分为两类：第一类间断点和第二类间断点. 若点 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点，但在该点处的左右极限 $f(x_0^-)$，$f(x_0^+)$ 都存在，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点，包括可去间断点和跳跃间断点等；不是第一类间断点的间断点称为第二类间断点，包括无穷间断点和震荡间断点等.

例 8　设函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$，则点 $x=0$ 是它的间断点吗？若是间断点，指出它属于哪一类间断点.

解　该函数在 $x=0$ 没有定义，因此 $x=0$ 是间断点. 但 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，故该间断点是属于第一类的可去间断点.

三、连续函数的性质和初等函数的连续性

1. 连续函数的和、差、积、商的连续性

定理 6.1　设函数 $f(x),\ g(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$， $f(x)\cdot g(x)$， $\dfrac{f(x)}{g(x)}$（ $g(x_0)\neq 0$ ）在点 x_0 也连续.

该定理利用函数在一点连续的定义及函数极限的四则运算法则即可证明.

前面我们已证得， $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$， $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$，即 $\sin x,\cos x$ 是连续的. 因此，由定理 6.1 知， $\tan x$， $\cot x$， $\sec x$， $\csc x$ 在各自的定义域内都是连续的.

2. 反函数的连续性

定理 6.2　如果函数 $f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加（或单调减少）且连续，那么它的反函数 $x=\phi(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\left\{y\middle|y=f(x),x\in I_x\right\}$ 上单调增加（或单调减少）且连续.

由该定理知道，反三角函数在各自的定义域内是连续的. 前面已证得， $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$，因此指数函数的反函数，即对数函数 $y=\log_a x$ 在其定义域内也是连续的.

3. 复合函数的连续性

定理 6.3　设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续，那么复合函数 $y=f\left[\varphi(x)\right]$ 在点 $x=x_0$ 处也连续.

例 9　证明：幂函数 $y=x^\mu$，其中 μ 为实数，且 $\mu\neq 0$，在 $(0,+\infty)$ 上连续.

证　由于 $y=x^\mu=a^{\log_a x^\mu}=a^{\mu\log_a x}$，因此函数 $y=x^\mu$ 可看成是由两个连续函数 $y=a^u$， $u=\mu\log_a x$ 复合而成的，因此由定理 6.3 知，幂函数在 $(0,+\infty)$ 上连续.

4. 初等函数的连续性

由上面的讨论知道，基本初等函数在它们各自的定义域内都是连续的. 再由初等函数的定义及上述定理易知，一切初等函数在其定义域内都是连续的.

这样，由函数在一点连续的定义，如果函数 $f(x)$ 是初等函数，且点 x_0 是其定义域内的点，那么就有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

例如， $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x=\ln\sin\dfrac{\pi}{2}=0$.

例 10　设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\ln(1+x)}{x}, & x>0\\ \cos 2x, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，求 a 的值.

解　显然，函数 $f(x)=\cos 2x$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内连续；而不论 a 取何值，函数 $f(x)=\dfrac{a\ln(1+x)}{x}$ 都在区间 $(0,+\infty)$ 内连续. 因此，只需考察 $f(x)$ 在分段点 $x=0$ 处的连续性. 由于

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{a\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{x}=a\,,$$

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\cos 2x=\cos 0=1\,,$$

$$f(0)=\cos(2\cdot 0)=1\,.$$

当 $f(x)$ 在分段点 $x=0$ 处连续时，应有

$$a=f(0^+)=f(0^-)=f(0)=1\,,$$

即 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

习题 1.6

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极限是它在该点处连续的________条件.

2. $f(x)=\begin{cases}x^2, & x>0\\ x+a, & x\leqslant 0\end{cases}$，在 x=0 处连续，则 a=________.

3. 要使函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 连续，则应在 $x=-1$ 处补充定义________.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ \mathrm{e}^x, & x<0\end{cases}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

（A）连续点　　（B）可去间断点　　（C）跳跃间断点　　（D）第二类间断点

5. 下列结论正确的是（　　）.

（A）基本初等函数在定义区间上不一定连续；

（B）分段函数在定义区间上必连续；

（C）在定义区间上连续的函数都是初等函数；

（D）分段函数在分段点不一定连续.

6. 讨论 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+2, & x\leqslant 0\\ \dfrac{\sin kx}{x}, & x>0\end{cases}$ 在 k 为何值时，函数在 $x=0$ 处连续.

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x-a, & x<1,\\ b, & x=1,\\ \ln x, & x>1.\end{cases}$ 求 a，b 的值，使函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

8. 求出下列函数的间断点并判断其类型.

（1）$y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$；　　（2）$y=\dfrac{1}{x^2+x-2}$；　　（3）$f(x)=\begin{cases}x-1 & x>0\\ \sin x & x\leqslant 0\end{cases}$；

（4）$f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$；　（5）$y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$；　（6）$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 1\\ \dfrac{1}{2} & ,x=1\end{cases}$.

第七节　闭区间上连续函数的性质

闭区间上的连续函数有着很好的分析性质，这些性质有着很重要的理论价值和应用价值.

一、最大值、最小值定理和有界性定理

定理 7.1　闭区间上的连续函数在该区间上有界，且一定能取得最大值和最小值.

该定理从图 1-21 上很容易直观地看出来，但它的证明却很烦琐，因此，该定理的证明这里就省略了.

定理 7.1 的两个条件，即闭区间和连续，缺一不可，缺少其中的一个可能就会导致定理不成立.

（1）函数 $f(x)=x$ 在区间 $(-1,1)$ 内是连续的，但它在该区间上既无最大值也无最小值（见图 1-22）.

（2）函数 $f(x)=\begin{cases}-x+2, & 0<x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{3}{2}, & x=0,\\ -x+1, & -\dfrac{1}{2}\leqslant x<0,\end{cases}$ 在区间 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ 有定义，但在该区间上不连续，$x=0$ 是它的间断点. 从它的图像（见图 1-23）容易看出，$f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ 上有界，但取不到最大值和最小值.

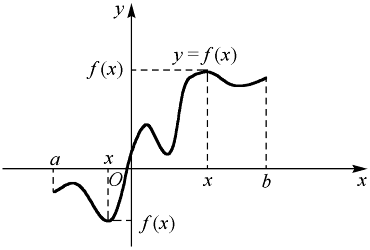


图 1-21

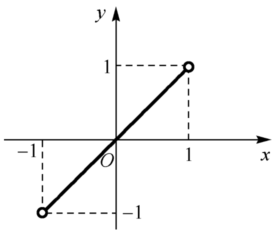


图 1-22

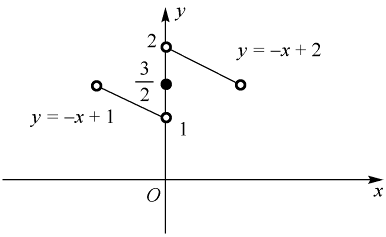


图 1-23

二、介值定理

定理 7.2　（介值定理）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$，那么，对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得

$$f(\xi)=C\quad（a<\xi<b）.$$

该定理不给出证明. 但它反映的函数的性质很容易从图 1-24 上看出.

定理 7.2 的几何意义是，如果过 y 轴上的区间 (A,B)（或 (B,A)）内的任意一点 C，作平

行于 x 轴的直线 $y=C$，则连续曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=C$ 至少相交于一点 $(\xi, f(\xi))$.

推论 1　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，M,m 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值，设有某数值 ρ，$m \leqslant \rho \leqslant M$，则在 $[a,b]$ 上必至少存在一点 η（见图 1-25），使得

$$f(\eta)=\rho .$$

证　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值点和最小值点分别为 x_1, x_2.

若 $\rho=m$，即 ρ 为 $f(x)$ 的最小值，则可取 $\eta=x_2$；若 $\rho=M$，则可取 $\eta=x_1$.

若 $m<\rho<M$，则在以 x_1,x_2 为端点的闭区间上对函数 $f(x)$ 利用定理 7.2 即可证得推论.

由图 1-25 还可以发现，如果函数在闭区间上曲线的两端点分别位于 x 轴的上方和下方，或者说，函数在闭区间的两端点处的函数值符号相反，那么数 0 一定是夹在两端点的函数值之间的. 这就是下面的零点定理要反映的函数的性质.

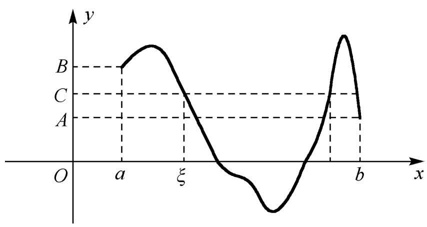


图 1-24

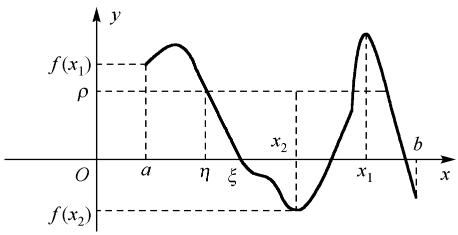


图 1-25

把满足方程 $f(x)=0$ 的 x 的值称为函数 $f(x)$ 的零点.

推论 2（零点定理）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a)\cdot f(b)<0$），那么在开区间 (a,b) 内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点，即至少有一点 ξ $(a<\xi<b)$，使得

$$f(\xi)=0 .$$

例　证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

证　令 $f(x)=x^3-4x^2+1$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又 $f(0)=1>0$，$f(1)=-2<0$. 故由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$，即 $\xi^3-4\xi^2+1=0$. 所以，方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

习题 1.7

1. 证明方程 $\mathrm{e}^x=x+2$ 在区间 $(0,2)$ 内至少有一个实根.
2. 证明方程 $x=a\sin x+b$（$a>0,\ b>0$）至少有一个不超过 $a+b$ 的正根.
3. 证明方程 $\cos x=x$ 在（$0,\pi$）内至少有一个实根.
4. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续，且 $f(a)>a, f(b)<b$，证明在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ 使得 $f(\xi)=\xi$.
5. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续，且 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，证明在闭区间 $[x_1,x_n]$ 上至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.
6. 证明方程 $\ln x=\dfrac{1}{2}-x$ 至少有一个不超过 1 的正根.

第二章　导数与微分

高等数学中研究导数、微分及其应用的部分称为微分学，研究不定积分、定积分及其应用的部分称为积分学. 微分学与积分学统称为微积分学.

微积分学是高等数学最基本、最重要的组成部分，是现代数学许多分支的基础，是人类认识客观世界、探索宇宙奥秘乃至人类自身的重要工具之一.

导数与微分是一元函数微分学的两个最基本的概念，本章主要讲述这两个基本概念及其运算.

第一节　导数的概念

在解决实际问题时，除了需要了解变量之间的函数关系外，经常还要考察一个函数的因变量随自变量变化而变化的快慢程度. 例如，求物体的运动速度、城市人口增长速度、劳动生产率、国民经济发展速度等. 导数概念就是从这类问题中抽象出来的，我们以切线问题和速度问题作为实际背景来建立相关概念.

一、两个引例

引例 1　平面曲线切线的斜率.

要回答这个问题，需要先定义曲线的切线. 在中学，切线定义为与曲线只交于一点的直线，这种定义只适用于少数几种曲线，如圆、椭圆等. 对于一般的曲线是不成立的. 下面就给出一般曲线切线的定义.

设 M_0 是曲线 $y=f(x)$ 上的一点，M 是曲线上与点 M_0 邻近的一点，作割线 M_0M. 当点 M 沿着曲线 $y=f(x)$ 趋于点 M_0 时，割线 M_0M 便绕着点 M_0 转动. 当点 M 无限趋于点 M_0 时，割线的极限位置是 M_0T，则称直线 M_0T 为曲线 $y=f(x)$ 在点 M_0 处的切线（见图 2-1）. 简言之，割线的极限位置就是切线.

下面来求曲线 $y=f(x)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的切线的斜率.

对曲线 $y=f(x)$ 上的点 $M_0(x_0,y_0)$，当其横坐标由 x_0 改变到 $x_0+\Delta x$，即横坐标改变了 Δx 时，纵坐标相应地由 y_0 改变到 $y_0+\Delta y$，即纵坐标改变了 Δy，这样，在曲线 $y=f(x)$ 上就得到了邻近于点 $M_0(x_0,y_0)$ 的点 $M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，割线 M_0M 的倾角为 φ（见图 2-2），其斜率是点 M_0 的纵坐标的改变量 Δy 与横坐标的改变量 Δx 之比，即

$$\tan\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

由上述切线的定义知，可以用割线 M_0M 的斜率近似切线斜率. 显然，Δx 越小，即点 M 沿曲线越接近于点 M_0，其近似程度越好.

现在让点 $M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 沿着曲线移动并无限趋于点 $M_0(x_0,y_0)$，即当 $\Delta x\to 0$ 时，割线 M_0M 将绕着点 M_0 转动，而达到极限位置成为切线 M_0T（见图 2-1 和图 2-2）. 所以割线 M_0M 的斜率的极限就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处切线 M_0T 的斜率，即

$$\tan\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\tan\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

上式中的α是切线M_0T对x轴的倾角.

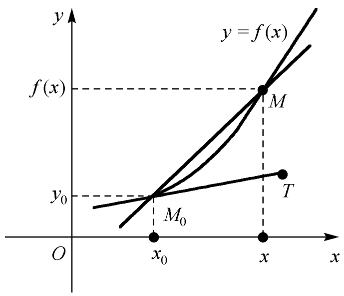


图 2-1

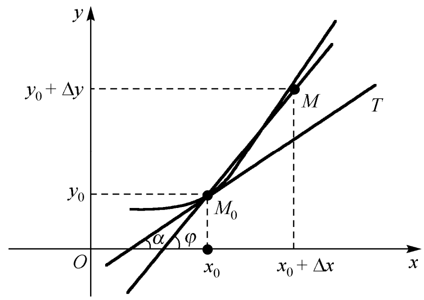


图 2-2

以上计算过程是：先作割线，求出割线斜率；然后通过取极限，从割线过渡到切线，从而求得切线斜率. 由上述推导可知，曲线$y=f(x)$在点$M_0(x_0,y_0)$与$M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$的割线$M_0M$的斜率$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，是曲线$y=f(x)$上点的纵坐标$y$对横坐标$x$在区间$[x_0,x_0+\Delta x]$上的平均变化率. 而在点$M_0$处的切线斜率是曲线上点的纵坐标$y$对横坐标$x$在$x_0$处的变化率. 显然，后者反映了曲线的纵坐标$y$随横坐标$x$变化而变化，且在横坐标为$x_0$处纵坐标$y$变化的快慢程度.

以上求曲线的切线斜率问题是一个几何问题，但从数学上看，是计算函数的改变量与自变量的改变量之比，当自变量的改变量趋于零时的极限，即对函数$y=f(x)$，要计算极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

上式中，分母Δx是自变量x在x_0取得的改变量，且$\Delta x\neq 0$；分子$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$是与$\Delta x$相对应的函数$f(x)$的改变量. 因此，若上述极限存在，这个极限就是函数在点x_0处的变化率，它描述了函数$f(x)$在点x_0变化的快慢程度.

引例 2　变速直线运动的瞬时速度.

一质点沿直线运动，其运动函数为$S=S(t)$（其中t表示时间，S表示时刻t时质点的位移）. 求该物体在t_0时刻的（瞬时）速度$V(t_0)$.

当时间由t_0改变到$t_0+\Delta t$时，物体在这一时间段内的位移为$S(t_0+\Delta t)-S(t_0)$. 在这段时间间隔内的平均速度为

$$\bar{V}(t)=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}.$$

当时间间隔Δt很小时，可以用$\bar{V}$近似地表示物体在t_0的速度，Δt越小，近似的程度就越好. 当$\Delta t\to 0$时，如果极限$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$存在，就称此极限为质点在时刻$t_0$的瞬时速度，即

$$V(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}.$$

上面两例的实际意义完全不同，但从抽象的数量关系看，其实质都是函数的改变量与

自变量的改变量之比，在自变量改变量趋于零时的极限. 我们把这种特定的极限叫作函数的导数.

二、导数的定义

定义 1.1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其左右邻域有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，并称此极限值为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数，记作

$$f'(x_0)，\quad y'|_{x=x_0}，\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=x_0}，\quad 或 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}|_{x=x_0}，$$

即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{1.1}$$

若上述极限不存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 不可导.

若记 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta x=x-x_0$，且当 $\Delta x\to 0$ 时，有 $x\to x_0$. 这样，函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数（1.1）式又可记作

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{1.2}$$

若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内每一点都可导，则对于每一个 $x\in I$，都有 $f(x)$ 的一个导数值 $f'(x)$ 与之对应，这样就得到一个定义在 I 上的函数，称之为函数 $y=f(x)$ 的导函数，记作 $f'(x)$，y'，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，或 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{1.3}$$

这时，称函数 $f(x)$ 在该区间内可导，或称 $f(x)$ 是区间 I 内的可导函数.

由（1.1）式和（1.3）式可知，函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数 $f'(x)$，正是该函数的导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 的值，即 $f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}$.

导函数简称为导数. 在求导数时，若没有指明是求在某一定点的导数，都是指求导函数.

由导数的定义形式可知，函数的导数实际上是一种特殊形式的函数极限，既然函数有左右极限的概念，那么导数也有左右导数的概念.

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其左侧（右侧）有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

或

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 左可导或右可导，并称此极限值为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左导数或右导数，记作 $f_-'(x_0)$,或 $f_+'(x_0)$. 即

$$f_-'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

$$f_+'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

由极限与左右极限的关系，可以得到导数与左右导数的关系.

定理 1.1　函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导的充分必要条件是它在这一点处的左、右导数存在且相等.

该定理主要用于判断闭区间左、右端点处的可导性以及分段函数在分段点处的可导性.

例 1　讨论 $f(x)=\begin{cases}e^{2x}, & x<0\\ \sin 2x+1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的可导性.

解　因为 $f\left(0\right)=1$，所以有

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x}=2,$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\left(2x\right)+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\left(2x\right)}{x}=2,$$

即 $f_-'(0)=f_+'(0)$，则 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处可导.

三、求导数举例

例 2　求常量函数 $y=C$ 的导数.

解　对任意一点 x，若自变量的改变量为 Δx，则总有

$$\Delta y=C-C=0.$$

于是，由（1.3）式，有

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

即常数的导数等于零.

例 3　求函数 $y=f(x)=x^2$ 在 $x=3$ 处的导数.

解　在 $x=3$ 处，当自变量有改变量 Δx 时，函数相应的改变量为

$$\Delta y=f(3+\Delta x)-f(3)=(3+\Delta x)^2-3^2=6\Delta x+(\Delta x)^2,$$

于是，$f(x)=x^2$ 在 $x=3$ 处的导数

$$f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(6+\Delta x)=6.$$

例 4　求函数 $y=x^3$ 的导数 y'，并求 $y'|_{x=1}$.

解　对任意点 x，当自变量的改变量为 Δx 时，因变量相应的改变量为

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3,$$

导函数

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [3x^2 + 3x \cdot (\Delta x) + (\Delta x)^2] = 3x^2,$$

由导函数再求指定点的导数值：

$$y'|_{x=1} = 3x^2|_{x=1} = 3.$$

若 n 是正整数，对函数 $y = x^n$，有 $y' = (x^n)' = nx^{n-1}$.

进一步地，对任意实数 α，幂函数 $y = x^\alpha$，有导数公式 $y' = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

四、导数的几何意义

根据引例 1 的讨论可知，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率. 即

$$k = \tan\alpha = f'(x_0),$$

其中 α 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的倾斜角.

于是，由直线的点斜式方程，曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

过点 $M(x_0, f(x_0))$ 且与切线垂直的直线称为曲线 $y = f(x)$ 在点 M 的法线. 如果 $f'(x_0) \neq 0$，则该法线的方程为

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

如果 $f'(x_0) = 0$，则切线方程为 $y = y_0$，法线方程为 $x = x_0$.

如果 $f'(x_0)$ 为无穷大，则切线方程为 $x = x_0$，即切线垂直于 x 轴.

例 5　试求曲线 $y = x^2$ 在点 $(3,9)$ 处的切线方程.

解　由于

$$y' = 2x, \quad y'|_{x=3} = 6,$$

所以，曲线 $y = x^2$ 在点 $(3,9)$ 处的切线方程为

$$y - 9 = 6(x - 3) \quad 或 \quad 6x - y - 9 = 0.$$

五、函数可导性与连续性的关系

我们知道，初等函数在其定义域内是连续的，那么函数的连续性与可导性之间有什么联系呢？下面的定理可以回答这个问题.

定理 1.2　如果函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点可导，那么它在 x_0 点必连续.

证　因为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，所以

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

由函数极限与无穷小量之间的关系，可得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

其中，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha = 0$. 从而有

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x .$$

对上式取极限可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}[f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x] = 0 ,$$

即函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点连续.

但是这个定理的逆命题不成立. 即函数在某点连续，但在该点不一定可导. 如函数 $y = |x|$，它在 $x = 0$ 处连续却不可导.

习题 2.1

1. 下列论述是否正确，并说明理由.

（1）函数的导数是函数的平均变化率在自变量的增量趋于零时的极限；

（2）$y = f(x)$ 在 x_0 点可导的充分必要条件是 $y = f(x)$ 在 x_0 点的左、右导数都存在；

（3）函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点连续是它在 x_0 点可导的充分必要条件.

2. 用幂函数的导数公式求下列函数的导数.

（1）$y = x^{10}$；　　（2）$y = \dfrac{1}{x^3}$；

（3）$y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$；　　（4）$y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

3. 求抛物线 $y = x^2$ 在 $A(1,1)$ 点和 $B(-2,4)$ 点的切线方程.

4. 求下列曲线在指定点 P 的切线方程.

（1）$y = \dfrac{x^2}{4}$，$P(2,1)$；　　（2）$y=\dfrac{1}{x^2}$，$P(1,1)$.

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x, & x < 1 \\ \mathrm{e}x, & x \geqslant 1 \end{cases}$，求 $f'(1)$.

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ 2x+1, & x \geqslant 0 \end{cases}$，求 $f'(x)$.

第二节　函数的求导法则

根据定义求导往往非常烦琐，有时甚至是不可行的. 能否找到求导数的一般法则或常用函数的求导公式，使求导的运算变得更为简单易行呢？在探求这一途径的过程中，牛顿和莱布尼兹都做了大量的工作，特别是博学多才的数学符号大师莱布尼兹对此做出了不朽的贡献.

一、函数的和、差、积、商的求导法则

定理 2.1　设函数 $u = u(x)$，$v = v(x)$ 都是可导函数，则

（1）代数和 $u(x) \pm v(x)$ 可导，且 $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$.

（2）乘积 $u(x)\cdot v(x)$ 可导，且 $[u(x)v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$；特别地，若 C 为常数，有 $[Cv(x)]' = Cv'(x)$.

（3）若 $v(x)\neq 0$，商 $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 可导，且 $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$；特别地，有

$$\left[\frac{C}{v(x)}\right]'=-\frac{Cv'(x)}{[v(x)]^2}.$$

乘积法则可推广到有限个函数的情形. 例如，对三个函数的乘积，有

$$[u(x)v(x)w(x)]'=u'(x)v(x)w(x)+u(x)v'(x)\omega(x)+u(x)v(x)w'(x).$$

例 1　设 $y=x^3+\sqrt[3]{x}+3^x-\log_3 x+3^3$，求 y'.

解　由代数和的导数法则，得

$$\begin{aligned}
y'&=(x^3+\sqrt[3]{x}+3^x-\log_3 x+3^3)'\\
&=(x^3)'+(x^{\frac{1}{3}})'+(3^x)'-(\log_3 x)'+(3^3)'\\
&=3x^2+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+3^x\ln 3-\frac{1}{x\ln 3}+0\\
&=3x^2+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+3^x\ln 3-\frac{1}{x\ln 3}.
\end{aligned}$$

例 2　设 $y=x^3\ln x+2\cos x$，求 y'.

解　由代数和及乘积的导数法则，得

$$\begin{aligned}
y'&=(x^3\ln x+2\cos x)'\\
&=(x^3\ln x)'+(2\cos x)'\\
&=(x^3)'\ln x+x^3(\ln x)'+2(\cos x)'\\
&=3x^2\ln x+x^3\frac{1}{x}+2(-\sin x)\\
&=3x^2\ln x+x^2-2\sin x.
\end{aligned}$$

例 3　设 $y=\tan x$，求 y'.

解　由商的导数法则，得

$$\begin{aligned}
y'&=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}\\
&=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}\\
&=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\\
&=\frac{1}{\cos^2 x}\\
&=\sec^2 x.
\end{aligned}$$

例 4　设 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}$，求 y'.

解　由商的导数法则，得

$$y'=\left(\frac{e^x}{1+x^2}\right)'=\frac{(e^x)'(1+x^2)-e^x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$$
$$=\frac{e^x(1+x^2)-e^x(2x)}{(1+x^2)^2}=\frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}.$$

二、反函数的求导法则

定理 2.2　设单调函数 $x=\varphi(y)$ 在某区间内可导且 $\varphi'(y)\neq 0$，则其反函数 $y=f(x)$ 在对应的区间内也可导，且

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

即反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

例 5　设 $y=\arcsin x$，求 y'.

解　$y=\arcsin x$ 的反函数为 $x=\sin y$，它在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调、可导，并且 $(\sin y)'=\cos y\neq 0$，因此反三角函数 $y=\arcsin x$ 也是可导的，且

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可证，$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$，$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

三、复合函数的求导法则

定理 2.3　设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 可导，而函数 $y=f(u)$ 在对应的点 $u=\varphi(x)$ 可导，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x 可导，且

$$\frac{df(\varphi(x))}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx},$$

或记作

$$[f(\varphi(x))]'=f'(u)\varphi'(x)=f'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

上式就是复合函数的导数公式. 复合函数的导数等于已知函数对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数.

说明　符号 $[f(\varphi(x))]'$ 表示复合函数 $f(\varphi(x))$ 对自变量 x 求导数，而符号 $f'(\varphi(x))$ 表示复合函数 $f(\varphi(x))$ 对中间变量 $u=\varphi(x)$ 求导数.

例 6　设 $y=e^{\sin x}$，求 y'.

解　令 $y=f(u)=e^u$，$u=\varphi(x)=\sin x$.

于是

$$y'=f'(u)\varphi'(x)=(e^u)'(\sin x)'=e^u\cos x=e^{\sin x}\cos x$$

说明　在求复合函数的导数时，若设出中间变量，已知函数要对中间变量求导数，所以

计算式中出现中间变量，最后必须将中间变量以自变量的函数代换.

例 7　设 $y=\sin^2 x$，求 y'.

解　令 $y=f(u)=u^2$，$u=\varphi(x)=\sin x$

于是

$$\begin{aligned} y' &= f'(u)\varphi'(x)=(u^2)'(\sin x)' \\ &= 2u\cdot\cos x=2\sin x\cos x=\sin 2x. \end{aligned}$$

例 8　设 $y=\sin 2x$，求 y'.

解　令 $y=f(u)=\sin u$，$u=\varphi(x)=2x$

于是

$$\begin{aligned} y' &= f'(u)\varphi'(x)=(\sin u)'(2x)' \\ &= \cos u\cdot 2=2\cos 2x. \end{aligned}$$

例 9　设 $y=\arcsin(x^2)$，求 y'.

解　将已知函数看成是由下列函数构成的复合函数：

$$y=f(u)=\arcsin u,\quad u=\varphi(x)=x^2$$

于是

$$\begin{aligned} y' &= f'(u)\varphi'(x)=(\arcsin u)'(x^2)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot(2x)=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}. \end{aligned}$$

例 10　设 $y=\sqrt{x^2+2^x}$，求 y'.

解　将已知函数看成是由下列函数构成的复合函数：

$$y=f(u)=\sqrt{u},\quad u=\varphi(x)=x^2+2^x$$

于是

$$\begin{aligned} y' &= f'(u)\varphi'(x) \\ &= (\sqrt{u})'\cdot(x^2+2^x)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x+2^x\ln 2) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+2^x}}(2x+2^x\ln 2). \end{aligned}$$

复合函数的导数公式可推广到有限个函数复合的情形.

例如，由 $y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\omega(x)$ 复合成函数 $y=f(\varphi(\omega(x)))$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

或

$$y'=f'(u)\varphi'(v)\omega'(x)=f'(\varphi(\omega(x)))\varphi'(\omega(x))\omega'(x).$$

例 11　设 $y=\cos \mathrm{e}^{x^2-2x+2}$，求 y'.

解　设 $y=\cos u$，$u=\mathrm{e}^v$，$v=x^2-2x+2$，于是

$$
\begin{aligned}
y' &= (\cos u)'(\mathrm{e}^v)'(x^2-2x+2)' \\
&= -\sin u \cdot \mathrm{e}^v (2x-2) \\
&= -2(x-1)\sin \mathrm{e}^{x^2-2x+2} \cdot \mathrm{e}^{x^2-2x+2}.
\end{aligned}
$$

求复合函数的导数，关键是分析清楚复合函数的构造. 做题较熟练后，可不写出中间变量，按复合函数的构成层次，由外层向内层逐层求导. 经过一定数量的练习之后，就能做到一步写出复合函数的导数.

例 12 设 $y=\sin^3 x$，求 y'

解 $y'=(\sin^3 x)'=3\sin^2 x\cdot\cos x$.

四、常见基本初等函数的导数公式

（1）$(C)'=0$；

（2）$(x^a)'=ax^{a-1}$；

（3）$(a^x)'=a^x\ln a$；

（4）$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；

（5）$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$；

（6）$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

（7）$(\sin x)'=\cos x$；

（8）$(\cos x)'=-\sin x$；

（9）$(\tan x)'=\sec^2 x$；

（10）$(\cot x)'=-\csc^2 x$；

（11）$(\sec x)'=\sec x\tan x$；

（12）$(\csc x)'=-\csc x\cot x$；

（13）$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

（14）$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

（15）$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；

（16）$(\mathrm{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

五、高阶导数

一般来说，函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍是 x 的函数，若导函数 $f'(x)$ 还可以对 x 求导，则称 $f'(x)$ 的导数为函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作

$$y'',\quad f''(x),\quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}.$$

函数 $y=f(x)$ 在某点 x_0 的二阶导数，记作

$$y''|_{x=x_0},\quad f''(x_0),\quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}|_{x=x_0} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}|_{x=x_0}.$$

同样，函数 $y=f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 的导数称为函数 $y=f(x)$ 的三阶导数，记作

$$y''',\quad f'''(x),\quad \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}.$$

一般地，$n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x)$ 的导数称为函数 $y=f(x)$ 的 n 阶导数，记作

$$y^{(n)},\quad f^{(n)}(x),\quad \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}.$$

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数. 相对于高阶导数而言，函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 就称为一阶导数.

根据高阶导数的定义可知，求函数的高阶导数不需要新的方法，只要对函数一次一次地求导就行了.

例 13　设 $y=\mathrm{e}^x\cos x$，求 y''，$y''|_{x=0}$.

解　先求一阶导数

$$y'=\mathrm{e}^x\cos x+\mathrm{e}^x(-\sin x)=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x),$$

对一阶导数的结果再求导，便可得二阶导数

$$\begin{aligned}y''&=[\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)]'\\&=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)+\mathrm{e}^x(-\sin x-\cos x)\\&=-2\mathrm{e}^x\sin x,\end{aligned}$$

将 $x=0$ 代入二阶导数中，便可得

$$y''|_{x=0}=(-2\mathrm{e}^x\sin x)|_{x=0}=0 .$$

例 14　设 $y=\sin x$，求 $y^{(n)}$.

解

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''=-\sin x=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(4)}=\sin x=\sin\left(x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cdots$$

一般地，可得 $y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

类似地，可得 $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

习题 2.2

1. 求下列函数的导数.

（1）$y=x^2+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{3}$；　　（2）$y=\sqrt{x}(x+\dfrac{1}{x^2})$；

（3）$y=\dfrac{(1-x)^3}{x^2}$；　　（4）$y=x\ln x$；

（5）$y=2^x+\tan x-\dfrac{\sin x}{x}$；　　（6）$y=\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$.

2. 求下列函数的导数.

（1）$y=(2-x)^7$；　　（2）$y=\cos(3x+2)$；

（3）$y=\mathrm{e}^{\arctan x}$；　　（4）$y=\tan\sqrt{1-x}$；

（5）$y=\arcsin e^{2x}$；（6）$y=\arccos\dfrac{1}{x}$；

（7）$y=\sqrt{1+\sin^2 x}$；（8）$y=\sin\sqrt{1+x^2}$.

3. 求下列函数的二阶导数.

（1）$y=\dfrac{x^2}{1-x}$；（2）$y=x^3-2x^2+x-1$；

（3）$y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$；（4）$y=\ln(1-x^2)$；

（5）$y=xe^{x^2}$；（6）$y=\dfrac{e^x}{x}$.

第三节　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数

一、隐函数的导数

前面所讨论的函数，都是一个变量明显地用另一个变量表示的形式，例如

$$y=\cos(2x+1), y=x^2+1,$$

用 $y=f(x)$ 这种方式表示的函数称为显函数**.**

如果在一定条件下，对于某区间 I 上的任意一个值 x，通过方程 $F(x,y)=0$ 相应地总有满足这个方程的唯一的实数 y 存在，则称方程 $F(x,y)=0$ 在区间 I 上确定了一个隐函数. 例如 $x^2-y+3=0, x^2+y^3+\sin y=2$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 称为隐函数.

对于某些特殊情形的隐函数可以化为显函数，称为隐函数的显化，如 $x^2-y+3=0$. 但是不是所有的隐函数都可以显化，如 $x^2+y^3+\sin y=2$.

隐函数的求导方法的基本思想是把方程 $F(x,y)=0$ 中的 y 看作 x 的函数 $y=y(x)$，方程两边对 x 求导数，得到一个关于 $\dfrac{dy}{dx}$ 的方程，然后从中解出 $\dfrac{dy}{dx}$. 下面通过具体的例子说明这种方法.

例 1　求方程 $e^y+xy-e=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 在点 $x=0$ 处的的导数 $y'|_{x=0}$.

解　方程两边对 x 求导，得　$e^y\cdot y'+y+xy'=0$,

整理得

$$y'=-\frac{y}{x+e^y},$$

因为当 $x=0$ 时，从原方程得 $y=1$，所以

$$y'|_{x=0}=\left(-\frac{y}{x+e^y}\right)\bigg|_{x=0}=-\frac{1}{e}.$$

例 2　求方程 $x+y+\sin y=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解　方程两边对 x 求导，得 $1+y'+\cos y\cdot y'=0$，

整理得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{1+\cos y},$$

上式两边再对 x 求导数，得

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{1+\cos y}\right)=\frac{(1+\cos y)'}{(1+\cos y)^2}=\frac{-\sin y\cdot y'}{(1+\cos y)^2}$$

$$=\frac{\sin y\cdot\dfrac{1}{1+\cos y}}{(1+\cos y)^2}=\frac{\sin y}{(1+\cos y)^3}.$$

二、对数求导法

一般说来，形如 $y=[u(x)]^{v(x)}$ 的函数，其中 $u(x),v(x)$ 都是 x 的函数，这种形式的函数既不是指数函数，也不是幂函数，我们称之为幂指函数. 求幂指函数的导数时，通常先取对数，然后再用隐函数求导法则求出导数，这种方法称为对数求导法. 利用所谓对数求导法求导比用通常的方法简便一些. 我们通过下面的例子说明.

例 3 求函数 $y=x^x\,(x>0)$ 的导数.

解 方程两边取对数，得 $\ln y=x\ln x$，

上式两边同时对 x 求导，得 $$\frac{1}{y}y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1,$$

于是， $$y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1).$$

例 4 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-5)}}$（$x>5$）的导数.

解 方程两边取对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-5)],$$

上式两边同时对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-5}\right),$$

于是

$$y'=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-5}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-5}\right)\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-5)}}.$$

三、由参数方程所确定的函数的导数

有些问题中，因变量 y 与自变量 x 的函数关系不是直接用 y 与 x 的解析式来表示，而是通过一个参变量来表示.

设方程组 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 确定了 y 是 x 的函数，则称此函数关系为由参数方程所确定的函数.

下面讨论由参数方程表示的函数关系的导数.

设 $x=\varphi(t)$ 有连续反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，又 $\varphi'(t)$ 与 $\psi'(t)$ 存在，且 $\psi'(t)\neq 0$. y 与 x 构成复合函数 $y=\psi(t)=\psi(\varphi^{-1}(x))$.

利用反函数与复合函数的求导法则，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

例 5　设 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$ 确定了函数 $y=f(x)$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'}=\frac{a\cos t}{-a\sin t}=-\cot t.$$

例 6　设 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln(1+t^2)\end{cases}$ 确定了函数 $y=f(x)$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}==\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{(\ln(1+t^2))'}{(\arctan t)'}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=2t.$$

习题 2.3

1. 设函数 $y=y(x)$ 由下列方程确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

（1） $y^2+xy+1=0$；　（2） $x^3+y^3-3xy=0$；

（3） $xy=\mathrm{e}^{x+y}$；　（4） $\ln y=2-y\mathrm{e}^x$.

2. 求曲线 $y=1-x\mathrm{e}^y$ 上对应于 $x=0$ 点处的切线方程.

3. 设函数 $y=y(x)$ 由下列方程确定，求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

（1） $x^2+y^2=2y$；　（2） $y=1+x\mathrm{e}^y$.

4. 用对数求导法求下列函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

（1） $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$；　（2） $y=\frac{x^x}{1-x}$；

（3） $y=\frac{\sqrt{1+x}}{\mathrm{e}^{x^2}\sin x}$；　（4） $x^y-y^x=0$.

5. 求由下列参数方程所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

（1） $\begin{cases}x=t^2/2,\\ y=1-t^3;\end{cases}$　（2） $\begin{cases}x=1+\sqrt{1+t},\\ y=1-\sqrt{1-t};\end{cases}$

（3） $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\sin t,\\ y=\mathrm{e}^t\cos t;\end{cases}$　（4） $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t-\arctan t.\end{cases}$

6. 写出下列曲线在所指定点处的切线方程.

（1）$\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t - 2t^2 \end{cases}$，在点 $(2,1)$ 处；（2）$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos 2t \end{cases}$，在 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 处.

第四节　函数的微分

一、微分的概念

导数可以描述函数在某点变化的快慢程度，但有时还需要了解函数在某一点当自变量取得微小变化时，函数相应改变量的大小.

先来看一个例子，边长为 x 的正方形，当边长增加 Δx 时，其面积增加多少？

设正方形的面积为 s，面积的增加部分记作 Δs，则

$$\Delta s = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 .$$

可见面积的改变量由两部分组成：

第一部分 $2x\Delta x$ 是关于 Δx 的线性函数，即 Δs 的主要部分；

第二部分 $(\Delta x)^2$ 是关于 Δx 的高阶无穷小，占极其微小的部分.

当 Δx 很小时，例如 $x = 1, \Delta x = 0.01$，则 $2x\Delta x = 0.02$，而另一部分 $(\Delta x)^2 = 0.0001$，当 Δx 越小时，$(\Delta x)^2$ 部分就比 $2x\Delta x$ 小得更多．因此，如果要取 Δs 的近似值时，显然 $2x\Delta x$ 是 Δs 的一个很好的近似，$2x\Delta x$ 就称为 $s = x^2$ 的微分.

定义 4.1　设函数 $f(x)$ 在点 x 的一个邻域内有定义，如果函数 $f(x)$ 在点 x 处的增量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 可以表示为 $\Delta y = A\Delta x + \alpha$，其中 A 与 Δx 无关，α 是 Δx 的高阶无穷小量，则称 $A\Delta x$ 为函数 $y = f(x)$ 在 x 处的微分，记作 $\mathrm{d}y$，即

$$\mathrm{d}y = A\Delta x .$$

这时也称函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可微.

例 1　设 $y = x^3$，求 $x = 1$，$\Delta x = 0.1$ 时函数增量和函数微分.

解

$$\Delta y = (1 + \Delta x)^3 - 1^3 = 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [3(\Delta x) + (\Delta x)^2] = 0 .$$

所以，函数 $y = x^3$ 在点 $x = 1$，$\Delta x = 0.1$ 处的微分是

$$\mathrm{d}y = 3\Delta x = 0.3 ,$$

函数增量为

$$\Delta y = (1 + \Delta x)^3 - 1^3 = 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = 0.331.$$

定理 4.1　设函数 $y = f(x)$ 在点 x 可微，则函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可导，且 $A = f'(x)$．反之，如果函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可导，则 $f(x)$ 在点 x 可微.

证　下面先讨论可微的条件．设函数 $y = f(x)$ 在点 x 可微，则由定义得

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha ,$$

其中，A 与 Δx 无关，α 是 Δx 的高阶无穷小量，

因此

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x + \alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A + \frac{\alpha}{\Delta x} \right) = A .$$

这说明 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，并且 $A=f'(x)$.

反之，如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

存在. 根据极限与无穷小的关系，上式可以写成

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha.$$

其中，α 是 $\Delta x\to 0$ 的无穷小量，因此

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x.$$

而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$，即有

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x).$$

由微分的定义，函数 $y=f(x)$ 在点 x 可微，并且 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$.

上述定理可叙述为：函数 $f(x)$ 在 x 处可微的充要条件是函数在 x 处可导.

例 2　求函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 和 $x=3$ 处的微分.

解　函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的微分为 $\mathrm{d}y=(x^2)'|_{x=1}\ \Delta x=2\Delta x$.

在 $x=3$ 处的微分为 $\mathrm{d}y=(x^2)'|_{x=3}\ \Delta x=6\Delta x$.

通常把自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分，记作 $\mathrm{d}x$，于是 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$. 从而有，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$. 因此，导数也称作微商（微分之商）.

二、微分的几何意义

为了对微分有比较直观的了解，我们来说明微分的几何意义.

在直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的导数表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率. 因此 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x=\tan\alpha\cdot\Delta x$（$\alpha$ 为切线对 x 轴的倾斜角）. 从图 2-3 可以看到，该微分 $\mathrm{d}y$ 是切线上从点 M 到点 P 的纵坐标的增量.

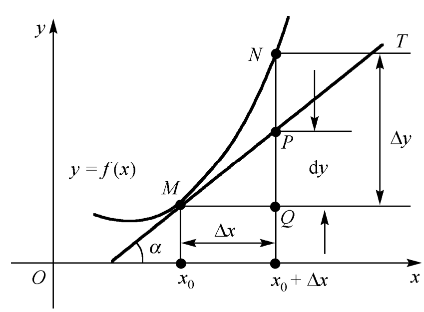


图 2-3

三、微分基本公式及其运算法则

1. 基本初等函数的微分公式

（1）$\mathrm{d}(C)=0$；　（2）$\mathrm{d}(x^a)=ax^{a-1}\mathrm{d}x$；

（3）$\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\,\mathrm{d}x$；　（4）$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；

（5）$\mathrm{d}(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$；　（6）$\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$；

（7）$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\,\mathrm{d}x$；　（8）$\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\,\mathrm{d}x$；

（9）$\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\,\mathrm{d}x$；　（10）$\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\,\mathrm{d}x$；

（11） $d(\sec x)=\sec x\tan x\,dx$；　　（12） $d(\csc x)=-\csc x\cot x\,dx$；

（13） $d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　　（14） $d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

（15） $d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$；　　（16） $d(\operatorname{arccot} x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$.

2. 微分的四则运算

定理 4.2　设函数 u,v 可微，则

（1） $d(u\pm v)=du\pm dv$；

（2） $d(uv)=udv+vdu$；

（3） $d\left(\frac{v}{u}\right)=\frac{udv-vdu}{u^2}$ （ $u\neq 0$ ）.

推论 1　当 v 为常数 C 时，则 $d(Cu)=Cdu$.

推论 2　当 $v=1$ 时，则 $d\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{-1}{u^2}du$.

例 3　设 $y=3x^2-\ln\frac{1}{x}$，求 dy.

解　$dy=d\left(3x^2-\ln\frac{1}{x}\right)=3dx^2-d\ln\frac{1}{x}=\left(6x+\frac{1}{x}\right)dx$.

例 4　设 $y=x\cos x$，求 dy.

解　$dy=d(x\cos x)=xd\cos x+\cos xdx=(\cos x-x\sin x)dx$.

例 5　设 $y=\frac{\sin x}{x}$，求 dy.

解

$$dy=d\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{xd\sin x-\sin xdx}{x^2}$$

$$=\frac{x\cos xdx-\sin xdx}{x^2}$$

$$=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx.$$

四、微分在近似计算中的应用

在工程问题中，经常会遇到一些复杂的计算公式，直接用这些公式进行计算很费力. 利用微分有时可以把一些复杂的计算公式用简单的近似公式来代替.

前面说过，如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微（可导），且 $|\Delta x|$ 很小时，有

$$\Delta y\approx dy=f'(x_0)\Delta x.$$

这个式子也可以写为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x \tag{4.1}$$

或

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \tag{4.2}$$

在上式中，令 $x=x_0+\Delta x$, 即 $\Delta x=x-x_0$, 那么上式可改写成为

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{4.3}$$

如果 $f(x_0)$ 与 $f'(x_0)$ 都容易计算，那么可以利用（4.1）式来近似计算 Δy，利用（4.2）式来近似计算 $f(x_0 + \Delta x)$，或利用（4.3）式来近似计算 $f(x)$. 这种近似计算的实质就是用 x 的线性函数 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 来近似表达函数 $f(x)$.

例 6　利用微分计算 $\sin 30°30'$ 的近似值.

解　把 $30°30'$ 化为弧度，得 $30°30' = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{360}$.

故设 $f(x) = \sin x$，取 $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$，则

$$f'(x) = \cos x,\quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

于是

$$\begin{aligned}\sin 30°30' &= \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{360} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360} \approx 0.5 + 0.0076 = 0.5076.\end{aligned}$$

例 7　证明当 x 很小时，$e^x \approx 1 + x$. 利用微分计算 $e^{-0.02}$ 的近似值.

解　设 $f(x) = e^x$，取 $x_0 = 0$，由于 $e^x\big|_{x=0} = 1, (e^x)'\big|_{x=0} = e^x\big|_{x=0} = 1$，

于是

$$e^x \approx e^0 + (e^x)'\big|_{x=0}\cdot(x - 0) = 1 + x,$$

利用这个近似表达式，易得

$$e^{-0.02} \approx 1 - 0.02 = 0.98.$$

习题 2.4

1. 求下列函数在点 x 处的微分 dy.

（1） $y = \ln x$；　　（2） $y = \sqrt[3]{x}$ （$x \neq 0$）；

（3） $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ （$x \neq 0$）；　　（4） $y = 2x + x^2$.

2. 求下列函数在点 $x = x_0$ 处的微分 $dy\big|_{x=x_0}$.

（1） $y = \cos x$，$x_0 = \dfrac{\pi}{2}$；　　（2） $y = x + \dfrac{1}{x}$，$x_0 = 1$.

3. 设函数 $y = \sqrt{x}$，求当 $x_0 = 1$，$\Delta x = 0.1$ 时函数的微分 dy.

4. 用函数的局部线性化计算下列数值的近似值.

（1） $\sqrt{1.05}$；　　（2） $\ln 1.002$.

第三章　中值定理与导数应用

在第二章，我们从分析变化率问题出发，引入了导数的概念，并探讨了求函数导数的方法. 在此基础上，本章主要探讨导数的应用，利用导数来研究函数及曲线的某些性态，并利用这些知识解决一些实际问题.

第一节　微分中值定理

微分学理论的核心由几个中值定理构成，包括费马引理、罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理. 这些定理揭示了函数在一个区间上的值与该区间内某点的导数间的联系. 由它们可以导出一系列重要定理，使微分学在更广泛的范围内起着重要作用.

一、罗尔定理

1. 函数的极值

定义 1.1　设函数 $f(x)$ 定义域为 D，如果存在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)\subset D$，使得对任意 $x\in U(x_0)$，恒有 $f(x)\leqslant f(x_0)$（或 $f(x)\geqslant f(x_0)$），则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极大值（或极小值），x_0 称为极大值点（或极小值点）. 极大值、极小值统称为函数的极值，使函数取得极值的点统称为函数的极值点.

关于函数的极值，有以下几点说明：

（1）函数在一个区间上可能有几个极大值或极小值，函数极大值和极小值的概念均是局部的；

（2）函数的极大值未必大于极小值；

（3）函数的极值点一定出现在区间内部，在区间的端点处不能取得极值.

2. 费马引理

费马引理　设函数 $y=f(x)$ 在点的 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 有定义且在 x_0 处可导，若对任意 $x\in U(x_0)$，恒有 $f(x)\leqslant f(x_0)$（或 $f(x)\geqslant f(x_0)$），则有 $f'(x_0)=0$.

证　不妨设函数在 x_0 取得极大值（极小值可类似证明），任取 $x_0+\Delta x\in U(x_0)$, 有 $f(x_0+\Delta x)\leqslant f(x_0)$，当 $\Delta x<0$ 时，

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0,$$

当 $\Delta x>0$ 时，

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0.$$

由极限的局部保号性知，

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0,\quad f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0.$$

因为函数在 x_0 可导，所以 $f'_-(x_0)=f'(x_0)=f'_+(x_0)=0$.

证毕.

通常称导数等于零的点为一元函数的驻点.

3. 罗尔定理

定理 1.1［罗尔（Rolle）定理］ 如果函数 $f(x)$ 满足：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间上 (a,b) 内可导；

（3）$f(a)=f(b)$.

则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

证 因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，所以由闭区间上连续函数的性质，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取得最大值 M 和最小值 m.

下面分两种情形考虑.

情形 1 当 $M=m$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是常数，则对任意的 $x\in(a,b)$，都有 $f'(x)=0$，从而结论成立.

情形 2 当 $M\neq m$ 时，因为 $f(a)=f(b)$，所以最大值和最小值至少有一个落入 (a,b) 内，不妨设 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=m$，因为函数在 (a,b) 内可导，由费马引理可得 $f'(\xi)=0$.

定理得证.

罗尔定理从几何上可解释如下：当曲线在 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内每一点都有不垂直于 x 轴的切线，且端点处的函数值相等，则在 (a,b) 内至少存在一点使得该点处的切线平行于端点连线（如图 3-1 所示）.

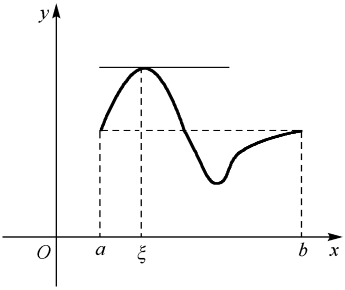


图 3-1

例 1 不必求出函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$ 的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的区间.

解 因为函数 $f(x)$ 是初等函数，所以在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续可导的．由于 $f(0)=f(1)=f(2)=f(3)=0$，因此，利用罗尔定理知，在区间 $(0,1),(1,2),(2,3)$ 内至少各存在一点 ξ_1、ξ_2、ξ_3，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$. 又由于 $f'(x)=0$ 是一元三次方程，其最多有三个实根. 这样方程 $f'(x)=0$ 就仅有三个实根，分别在区间 $(0,1)$、$(1,2)$、$(2,3)$ 内.

二、拉格朗日中值定理

定理 1.2（拉格朗日中值定理） 如果函数 $f(x)$ 满足：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 内可导.

则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

证 构造函数 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$，显然 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b)

内可导，且 $F(a)=F(b)$. 由罗尔定理可得，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$，或者写成 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

定理得证.

拉格朗日中值定理从几何上可解释如下：当曲线在 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内每一点都有不垂直于 x 轴的切线，则在 (a,b) 内至少存在一点，使得该点处的切线平行于端点连线（如图 3-2）.

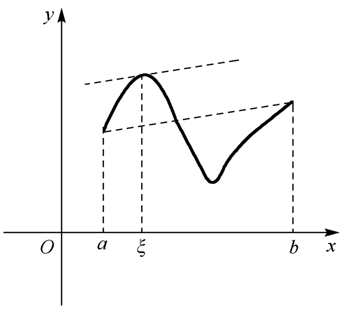


图 3-2

推论 1　如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\equiv 0$，则在 (a,b) 内 $f(x)$ 为常数.

例 2　证明：当 $0<\alpha<\beta$ 时，不等式 $\dfrac{\beta-\alpha}{1+\beta^2}<\arctan\beta-\arctan\alpha<\dfrac{\beta-\alpha}{1+\alpha^2}$ 成立.

证　取函数 $f(x)=\arctan x$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，在开区间 (α,β) 内可导，由拉格朗日中值定理知，在区间 (α,β) 内至少存在一点 ξ，使得 $\arctan\beta-\arctan\alpha=\dfrac{\beta-\alpha}{1+\xi^2}$. 由于 $\alpha<\xi<\beta$，故有

$$\frac{\beta-\alpha}{1+\beta^2}<\frac{\beta-\alpha}{1+\xi^2}<\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha^2},$$

因此

$$\frac{\beta-\alpha}{1+\beta^2}<\arctan\beta-\arctan\alpha<\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha^2}.$$

三、柯西中值定理

定理 3.3［柯西（Cauchy）中值定理］　设函数 $f(x),g(x)$ 满足：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上都连续；

（2）在开区间 (a,b) 内都可导；

（3）在开区间内 $g'(x)\neq 0$，

则在开区间 (a,b) 内，至少存在一点 ξ，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

习题 3.1

1. 验证函数 $y=\mathrm{e}^{(1-x)^2}$ 在区间 $[0,\ 2]$ 上满足罗尔定理，并求出定理中的 ξ.
2. 验证函数 $y=\ln x$ 在区间 $[1,\ \mathrm{e}]$ 上满足拉格朗日中值定理，并求出公式中的 ξ.
3. 在 $[-1,1]$ 内证明 $\arcsin x+\arccos x$ 恒为常数，并验证 $\arcsin x+\arccos x\equiv\dfrac{\pi}{2}$.
4. 不求出函数 $f(x)=x(x^2-4)$ 的导数，说明 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出其所在区间.
5. 证明下列不等式成立.

（1）对任何实数 a,b，证明 $|\sin a-\sin b|\leqslant|a-b|$；

（2）当 $0<b\leqslant a$ 时，证明 $\dfrac{a-b}{a}\leqslant \ln\dfrac{a}{b}\leqslant\dfrac{a-b}{b}$；

（3）$\dfrac{x}{1+x^2}<\arctan x<x(x>0)$.

第二节　洛必达法则

在求极限的过程中，经常遇到这样的情形，当 $x\to a$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都趋于零或都趋于无穷大，这时极限 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 可能存在，也可能不存在，通常称这两种类型的极限为未定式，简记为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$. 对于这样的未定式，即使极限存在也不能用极限四则运算法则来计算.

下面，利用柯西中值定理导出求这类极限的一种非常有效的方法.

一、$\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限

先探讨 $x\to a$ 时 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，有如下定理：

定理 2.1（洛必达法则）　设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $\mathring{U}(a)$ 内可导，并满足：

（1）$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$；

（2）$g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或为无穷大），则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证　定理的条件中未说明函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $x=a$ 的取值情况. 不妨假定 $f(a)=g(a)=0$. 任取 $x\in\mathring{U}(a)$，函数 $f(x)$，$g(x)$ 在以 x 和 a 为端点的区间上满足柯西中值定理，从而有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{\varepsilon\to a}\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证毕.

对于洛必达法则的应用范围，我们不加证明地指出两点：

（1）上述定理对 $x\to\infty$ 时的 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式同样适用;

（2）对于 $x\to a$ 或 $x\to\infty$ 时的 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式，也有相应的洛必达法则.

定理 2.2（洛必达法则）　设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $\mathring{U}(a)$ 内可导，并满足：

（1）$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$；

（2） $g'(x)\neq 0$；

（3） $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或为无穷大），则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

例 1 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{2x}=\infty$$

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

解
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}.$$

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

通过上述例题可以看到，在使用洛必达法则时应注意：

（1）先验证所讨论的式子是未定式，否则不能使用洛必达法则；

（2）若 $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍为未定式且满足定理的条件，则可再次使用洛必达法则，且可依次继续下去；

（3）洛必达法则可以与等价无穷小替换、初等恒等变形等技巧结合使用.

二、可化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的 $0\cdot\infty$ 与 $\infty-\infty$ 型的极限

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$.

解
$$\lim_{x\to 0}x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}(-2x^{-3})}{-2x^{-3}}=\infty.$$

例 5 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

解
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{x}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x(x-1)}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-2x+2}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-2x^2+2x}{x\ln x+x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-4x+3}{\ln x+2}=\frac{-1}{2}.$$

三、0^0、1^∞、∞^0 型不定式的极限

例 6 求极限 $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

解
$$\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to1}\mathrm{e}^{\ln x^{\frac{1}{1-x}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{-x}\right)}=\mathrm{e}^{-1}.$$

例 7 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^x$.

解
$$\lim_{x\to0^+}(\sin x)^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(\sin x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos x(-x^2)}{\sin x}}=1.$$

习题 3.2

1. 用洛必达法则求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$（$mn\neq0$）；

（3）$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin3x}{\tan5x}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2}$；

（5）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\arctan x-\dfrac{\pi}{2}}$；　　（6）$\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\tan x}{\tan3x}$；

（7）$\lim\limits_{x\to0}x\cot2x$；　　（8）$\lim\limits_{x\to+\infty}x\operatorname{arccot}x$；

（9）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$；　　（10）$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$；

（11）$\lim\limits_{x\to0}x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$；　　（12）$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

2. 验证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$ 存在，并说明不能用洛必达法则求得.

3. 验证极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$ 存在，并说明不能用洛必达法则求得.

第三节　泰勒中值定理

微积分的研究对象是函数，通过函数表达式来讨论函数的各种性状，这一过程离不开函数值的计算. 然而在初等函数中，除多项式外，其他各类函数实际上均无法直接计算函数值，这给函数性质的讨论带来很多困难. 由此提出了一个函数研究的基本问题：一般函数是否可表示为多项式函数.

一、泰勒中值定理

如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有直到 $n+1$ 阶的导数，则对任意 $x\in(a,b)$ 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \tag{3.1}$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)} \tag{3.2}$$

而ξ是介于x和x_0之间的某个值.

（3.1）式称为函数$f(x)$的n阶泰勒公式，（3.2）式中的$R_n(x)$称为拉格朗日型余项. 而

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称为$f(x)$在$x=x_0$的n次泰勒多项式.

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$+o[(x-x_0)^n] \tag{3.3}$$

（3.3）式称为函数$f(x)$的带有佩亚诺型余项的泰勒公式.

（3.1）式当$x_0=0$时的形式特别简单，由于此时ξ介于x和0之间，故可表为$\xi=\theta x$（$0<\theta<1$）. 通常称此时的泰勒公式为麦克劳林公式，即

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

二、几个初等函数的麦克劳林公式

例 1　求函数$f(x)=\mathrm{e}^x$的带有拉格朗日型余项的n阶麦克劳林公式.

解　函数$f(x)=\mathrm{e}^x$有任意阶导数，且$(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$，因此

$$\mathrm{e}^x\big|_{x=0}=(\mathrm{e}^x)'\big|_{x=0}=\cdots=(\mathrm{e}^x)^{(n)}\big|_{x=0}=1,$$

函数$f(x)=\mathrm{e}^x$的带有拉格朗日型余项的n阶麦克劳林公式为

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\frac{1}{n!}x^n+\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\quad (0<\theta<1).$$

例 2　求函数$f(x)=\sin x$的带有佩亚诺型余项及拉格朗日型余项的n阶麦克劳林公式.

解　$f(x)=\sin x$有任意阶导数，并且对任意的正整数n有

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=-1, f^{(4)}(0)=0\cdots.$$

$f(x)=\sin x$的带有佩亚诺型余项的麦克劳林公式（令$n=2k$），

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}+o(x^{2k}),$$

$f(x)=\sin x$的带有拉格朗日型余项的麦克劳林公式为

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1} + \frac{\sin\left[\theta x + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2k+1)!}x^{2k+1}, \quad (0<\theta<1)$$

类似地，有

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2k}).$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k} + \frac{\cos[\theta x + (k+1)\pi]}{(2k+2)!}x^{2k+2}, \quad (0<\theta<1).$$

三、泰勒公式在求极限中的应用

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

解

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4),$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o\left(\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2\right),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \frac{\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

习题 3.3

1. 按 $x-4$ 的乘幂形式改写多项式 $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$.
2. 将函数 $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ 在 $x=2$ 处展开为带有佩亚诺型余项的四阶泰勒公式.
3. 写出函数 $f(x) = \arctan x$ 的带有拉格朗日型余项的三阶麦克劳林公式.
4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2}$.

第四节　函数的单调性、极值与最值

一、函数的单调性的判别方法

函数的单调性反映了函数的变化方式，首先利用微分中值定理给出函数单调性的判别方法.

定理 4.1　设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导.

（1）如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

（2）如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$（驻点有有限个），则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

证 （1）从(a,b)内任取两点x_1,x_2，不妨假设$x_1<x_2$，函数$f(x)$在$[x_1,x_2]$上连续，在(x_1,x_2)内可导，由拉格朗日中值定理得，至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0$，由$x_1,x_2$在$(a,b)$内的任意性知$f(x)$在$[a,b]$单调增加.

（2）仿照（1）的证明方法得到.

推论 1　设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导.

（1）如果在(a,b)内$f'(x)\geqslant 0$（驻点有有限个），则函数$f(x)$在$[a,b]$单调增加；

（2）如果在(a,b)内$f'(x)\leqslant 0$（驻点有有限个），则函数$f(x)$在$[a,b]$单调减少.

在开区间内有有限个驻点不影响函数的单调性.

例 1　求函数$y=x^3-3x$的单调区间.

解　（1）函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

（2）$y'=3x^2-3$，令$y'=3x^2-3=0$，得$x_1=-1,x_2=1$.

（3）列表：

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
y'	+	–	+

则函数在$(-\infty,-1]$，$[1,+\infty)$上单调增加，在$[-1,1]$上单调减少.

例 2　求函数$y=\sqrt[3]{x^2}$的单调区间.

解　（1）函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

（2）$x\neq 0$时，$y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$；$x=0$时，函数的导数不存在.

（3）列表

x	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
y'	–	+

则函数在$(-\infty,0]$上单调减少，在$[0,+\infty)$上单调增加.

求函数单调区间的步骤：

（1）指出函数的定义域；

（2）求出驻点$f'(x)=0$ 或$f'(x)$不存在的点；

（3）这些点把定义域分成若干区间，在这些区间上根据导数符号判断单调性.

二、函数的极值

1．极值存在的必要条件

定理 4.2（极值的必要条件）　设函数$f(x)$在点x_0可导，且取得极值，则$f'(x_0)=0$.

定理 4.2 的说明：若函数$f(x)$在点x_0可导且取得极值，则点x_0是驻点；反之，函数的驻点未必是极值点. 如函数$f(x)=x^3$，显然$x=0$是驻点，但不是极值点. 导数不存在的点有可能是极值点.

如函数$f(x)=|x|$，按照定义可证明函数在点$x=0$是不可导的，但在$x=0$处取得极小值.

2．极值存在的充分条件

判断驻点和不可导点为极值点的方法：

定理 4.3（第一充分条件）　设函数$f(x)$在点x_0连续，并在x_0的某去心邻域$\mathring{U}(x_0)$可导，则有

（1）当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$f'(x_0)>0$；当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$f'(x_0)<0$； 则函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.

（2）当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$f'(x_0)<0$；当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$f'(x_0)>0$； 则函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

确定驻点和不可导点是极值点的步骤：

（1）指出函数的定义域；

（2）求出驻点 $f'(x)=0$ 或 $f'(x)$ 不存在的点；

（3）这些点把定义域分成若干区间，考察这些点左右两侧导数符号，确定是否取得极值.

判断驻点是极值点的另外一种方法，若函数在点 x_0 处 $f'(x_0)=0$，在 x_0 处有二阶导数且 $f''(x_0)\neq 0$，则有

定理 4.4（第二充分条件） 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则有

（1）当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值；

（2）当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值；

（3）若在 x_0 处 $f''(x_0)=0$，第二充分条件失效.

例 3 求函数 $y=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解 （1）函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

（2）$x\neq 0$ 时，$y'=1-x^{-\frac{1}{3}}$；$x=0$ 时，函数的导数不存在. 令 $y'=1-x^{-\frac{1}{3}}=0$，得驻点 $x=1$.

（3）列表

x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
y'	+	–	+

由上表知，函数在 $x=0$ 处有极大值 $f(0)=0$，$x=1$ 处有极小值 $f(1)=-\frac{1}{2}$.

例 4 求函数 $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+6$ 的极值.

解 （1）函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

（2）$y'=x^2-4x+3$，$y''=2x-4$，得驻点 $x=1$，$x=3$.

（3）$y''(1)=-2<0$，$y''(3)=2>0$，

因此，函数在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1)=\frac{22}{3}$；在 $x=3$ 处取得极小值 $f(3)=6$.

三、函数的最值

实际中更多的最优化问题是需要求函数的最大值、最小值，下面来讨论函数最值的求法.

假设函数 $f(x)$ 在闭区间 I 上连续，由闭区间上连续函数的性质，$f(x)$ 在 I 上一定能取得最大值 M 与最小值 m. 即区间 I 上一定存在两点 x_1，x_2，使得 $f(x_1)=M$，$f(x_2)=m$. 因此 x_1,x_2 可能是区间端点，也可能落在开区间内部，这样就是函数的极值点.

求最值一般有以下三步：

（1）求出函数在相应开区间内的驻点及不可导点；

（2）计算函数在上述各点及端点处的函数值；

（3）比较上面的计算结果，最大（小）的为最大（小）值.

例 5　求函数 $y=2x^3+3x^2-12x+14$ 在 $[-3,4]$ 上的最大值与最小值.

解　$y'=6x^2+6x-12$，令 $y'=0$，求得函数的驻点为 $x_1=-2$，$x_2=1$. 由于 $f(-3)=23$，$f(-2)=34$，$f(1)=7$，$f(4)=142$.

因此，函数在 $x=1$ 处取得最小值 7，在 $x=4$ 处取得最大值 142.

在实际问题中求最值时，有时会遇到函数在一个区间（开区间或闭区间、有限的或无限的）内可导，并且只有一个驻点的情况. 这时，如果能够判定是函数的极大值或极小值，那么，相应的它就是函数在该区间上的最大值或最小值.

另外，实际问题中，往往从问题本身就可以断定所讨论的可导函数确实存在最大值或者最小值，而且相应的最值点一定在区间内部取得. 这时如果函数只有一个驻点，那么这个驻点就一定是要求的最大值点或最小值点，而不必再判定该驻点是否为极值点.

例 6　要造一个体积为 V 的圆柱形无盖水桶，问底面半径 r 和高 h 等于多少时，才能使所用材料最省？

解　圆柱形水桶的表面积为 $S=2\pi rh+\pi r^2$. 由 $V=\pi r^2h$，得 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$. 因此有

$$S=2\pi rh+\pi r^2=2\pi r\frac{V}{\pi r^2}+\pi r^2=\frac{2V}{r}+\pi r^2,$$

$S'=-\dfrac{2V}{r^2}+2\pi r$，令 $S'=0$ 得唯一驻点 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$.

由于体积一定时，表面积一定存在最小值，这里只有一个驻点，因此该驻点一定是最小值点.

这时 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}=\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$，即当圆柱的高与底面半径相等时，用料最省.

习题 3.4

1. 判断函数 $f(x)=\arctan x-x$ 的单调性.

2. 判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x$ 的单调性.

3. 求下列函数的单调区间和极值.

（1）$y=x^3-3x^2$；　（2）$y=\dfrac{x^2+1}{x}$；

（3）$y=2-(x-1)^{\frac{2}{3}}$；　（4）$y=\dfrac{e^x}{x^2}$；

（5）$y=\ln(1+x)-x$；　（6）$y=x^2e^{-x}$.

4. 求下列函数在指定区间上的最大值 M 和最小值 m.

（1）$f(x)=3x^4-6x^2+1$，$x\in[0, 2]$；　（2）$f(x)=x+\sqrt{1-x}$，$x\in[-5, 1]$.

5. 证明下列不等式.

（1）当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{x^2+1})>\sqrt{x^2+1}$；

（2）当 $x>0$ 时， $\arctan x > x-\dfrac{x^3}{3}$；

（3）当 $x>1$ 时， $e^{x-1}-1>x\ln x$.

6. 借助现有的一面墙，围建一个长方形小院，求解下列问题：

（1）要使小院面积为 32 m^2，如何设计最省材料？

（2）如果建筑材料只够砌 16 m 长的墙，如何设计才能使小院面积最大？

第五节　曲线的凹凸性、渐近线及函数图形的描绘

一、曲线的凹凸性与拐点

前面我们利用导数研究了函数的单调性，但同样是单调增加的函数，它们的图形却会有不同的弯曲状况（如图 3-3 所示）.

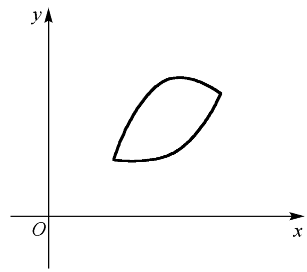


图 3-3

定义 5.1　设曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内各点都有切线，如果曲线上每一点的切线都在曲线的下方，则称曲线在区间 (a,b) 内是凹的，区间 (a,b) 称为曲线 $y=f(x)$ 的凹区间；如果曲线上每一点的切线都在曲线的上方，则称曲线在区间 (a,b) 内是凸的，区间 (a,b) 称为曲线 $y=f(x)$ 的凸区间.

连续曲线上凹凸区间的分界点称为拐点.

前面已经利用函数的一阶导数研究了函数的单调性，看来要研究曲线的凹凸性就不能再单单依靠一阶导数了. 下面的定理给出了利用函数的二阶导数来判别曲线凹凸性的方法.

定理 5.1　设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导. 那么

（1）如果在区间 (a,b) 内， $f''(x)>0$ ，则曲线弧 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的；

（2）如果在 (a,b) 内 $f''(x)<0$ ，则曲线弧 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的.

例 1　求函数 $y=x^3$ 的凹凸区间及拐点.

解　（1）函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

（2） $y'=3x^2$ ， $y''=6x$.

在 $(-\infty,0)$ 内， $y''<0$ ；在 $(0,+\infty)$ ， $y''>0$. 因此曲线在 $(-\infty,0]$ 是凸的；曲线在 $[0,+\infty)$ 是凹的. 拐点为 $(0,0)$.

例 2　求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的凹凸区间及拐点.

解　当 $x\neq 0$ 时， $y'=\dfrac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$ ， $y''=\dfrac{-2}{9}x^{\frac{-5}{3}}$. 在 $x=0$ 处，函数的 $y=\sqrt[3]{x}$ 二阶导数不存在. 因此，在 $(-\infty,0)$ 内， $y''>0$ ；在 $(0,+\infty)$ 内， $y''<0$. 因此曲线在 $(-\infty,0]$ 内是凹的；曲线在 $[0,+\infty)$ 内是凸的. 拐点为 $(0,0)$.

由上述两个例题可以总结出确定函数凹凸区间的一般步骤：

（1）指出函数的定义域；

（2）求出二阶导数 $f''(x)=0$ 或 $f''(x)$ 不存在的点；

（3）这些点把定义域分成若干区间，在这些区间上根据二阶导数符号判断凹凸性.

二、曲线的渐近线

1. 水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=c$ （或 $x\to+\infty$ ，或 $x\to-\infty$ ），则称直线 $y=c$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

2. 垂直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ （或 $x\to x_0^+$ ，或 $x\to x_0^-$ ），则称直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.

例 3　求曲线 $y=\dfrac{x}{(1-x)(1+x)}$ 的水平渐近线与垂直渐近线.

解　由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{(1-x)(1+x)}=0$，因此直线 $y=0$ 是水平渐近线.

又由于 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{(1-x)(1+x)}=\infty$， $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x}{(1-x)(1+x)}=\infty$， 因此 $x=1$ 及 $x=-1$ 是曲线的垂直渐近线.

三、函数图形的描绘

借助函数的单调性、凹凸性、拐点、极值以及渐近线等性质，并利用一些特殊的点就可以比较准确地描绘出函数的图形.

描绘函数图形的步骤：

（1）考察函数的定义域、函数的奇偶性、周期性；

（2）求出函数的导数，确定函数的单调区间及极值；

（3）求出函数的二阶导数，确定曲线的凹凸区间及拐点；

（4）考察函数图形的渐近线；

（5）计算特殊点（不可微点、极值点、拐点等）以及容易计算函数值的点（如与坐标轴的交点等）处的函数值.

（6）综合上述讨论，大体描绘出函数图形.

例 4　描绘函数 $y=x^3-x^2-x+1$ 的图形.

解　（1）函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$ ；

（2）无周期性和奇偶性；

（3） $y'=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$ ， $y''=6x-2=2(3x-1)$.

令 $y'=0$，得 $x=-\dfrac{1}{3},x=1$；令 $y''=0$ ，得 $x=\dfrac{1}{3}$.

为确定曲线的凹凸区间及拐点，列表如下.

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	–	–	–	0	+
y''	–	–	–	0	+	+	+
y	增，凸	极大值	增，凸	拐点	减，凹	极小值	增，凹

（4）易知，曲线无渐近线.

（5）曲线与坐标轴的交点：$A(-1,0)$，$B(0,1)$.

作出函数的图形，如图 3-4 所示.

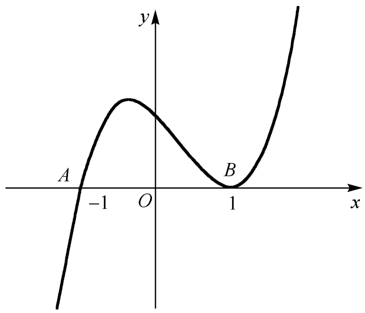


图 3-4

习题 3.5

1. 求下列曲线的凹凸区间及拐点.

（1）$y=x^3-5x^2+3x+5$；　　（2）$y=x-\dfrac{1}{x}$；

（3）$y=x\mathrm{e}^{-x}$；　　（4）$y=\ln(x^2+1)$.

2. 问 a, b 为何值时，点 $(1,2)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点？

3. 求下列曲线的垂直渐近线与水平渐近线.

（1）$y=\dfrac{x}{(x-1)(x+1)}$；　　（2）$y=x+\dfrac{\ln x}{x}$.

4. 描绘下列函数的图形.

（1）$y=\dfrac{x}{x^2+1}$；　　（2）$y=\ln(1+x^2)$.

第六节　曲　　率

在上一节知道，函数二阶导数的符号决定了曲线的弯曲方式. 但是，从图 3-5 中还看到，曲线不仅有弯曲方向的不同，同时还有弯曲程度的差别.

如何用数学的方法来刻画曲线的弯曲程度呢？在这一节，将建立关于曲线弯曲程度的度量，即曲率. 作为研究曲率的预备知识，先给出弧微分的概念.

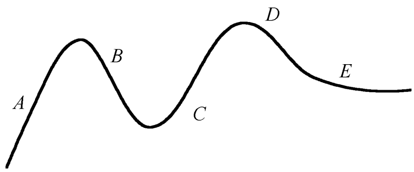


图 3-5

一、弧微分

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有连续导数.

取定曲线上一点 $M_0(x_0,y_0)$ 作为度量弧长的基点. 依 x 增大的方向作为曲线的正向. 设 $M(x,y)$ 为曲线上任意一点（如图 3-6）.

规定：有向弧段 $\widehat{M_0M}$ 的值 s 为一个实数：

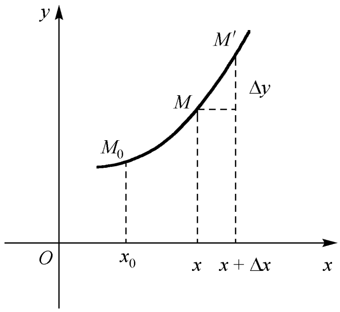


图 3-6

（1） s 的绝对值等于该弧的长度；

（2）当 $\overset{\frown}{M_0M}$ 的方向与曲线正向一致时，s 取正号，相反时，s 取负号.

因此， $s=s(x)$ 为单调递增函数（称为有向弧长函数）. 下面来求 $s=s(x)$ 的导数与微分.

在点 $M(x,y)$ 附近另取点 $M'(x+\Delta x,y+\Delta y)$，弧长函数 $s(x)$ 有增量

$$\Delta s=\overset{\frown}{MM'},$$

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2=\left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta x}\right)^2=\left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\right)^2\cdot\frac{|MM'|^2}{(\Delta x)^2}=\left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\right)^2\cdot\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}$$

$$=\left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\right)^2\cdot\left[1+\frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}\right],$$

因此 $\frac{\Delta s}{\Delta x}=\pm\sqrt{\left(\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\right)^2\cdot\left[1+\frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}\right]}$，当 $\Delta x\to 0$ 时， $\lim\limits_{M'\to M}\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}=1$，又 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$， $s=s(x)$ 是单调递增函数，所以有 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+y'^2}$.

从而得弧微分公式： $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$.

二、曲率

曲率是描述曲线局部性质（弯曲程度）的量（如图 3-7 所示）.

1. 平均曲率

如图 3-7，设 M 和 M' 是曲线上两点，弧 $\overset{\frown}{MM'}$ 长度为 Δs ，切线转过的角度 $\Delta\alpha$. 定义 $\bar{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ 为弧 $\overset{\frown}{MM'}$ 的平均曲率.

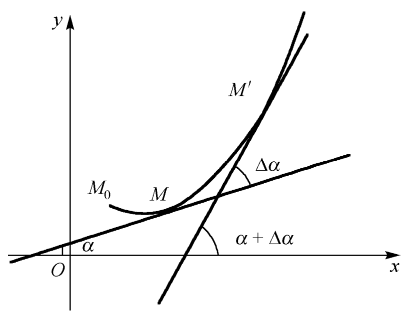


图 3-7

2. 曲线在任意一点的曲率

当 M 靠近 M' ，也即 $\Delta s\to 0$ 时，上述平均曲率的极限称为曲线在 M 处的曲率，记作

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|.$$

在极限 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$ 存在的条件下， K 可表示为 $K=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$.

3. 曲率的计算公式

设曲线方程为 $y=f(x)$，且 $f(x)$ 具有二阶导数，因此 $\tan\alpha=y'$ ，等式两端对 x 求导得

$$\sec^2\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=y'',\quad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{y''}{1+\tan^2\alpha}=\frac{y''}{1+y'^2},\quad \mathrm{d}\alpha=\frac{y''}{1+y'^2}\mathrm{d}x,$$

又知 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$. 从而曲率的计算公式为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

例 1　求抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 上使曲率最大的点.

解　先求出 $y'=2ax+b, y''=2a$，代入曲率计算公式得

$$K=\frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

当 $x=\frac{-b}{2a}$ 时，曲率最大，最大曲率为 $K=|2a|$，抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）在顶点 $\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 处取得最大曲率.

三、曲率圆与曲率半径

定义 6.1　设曲线 $C:y=f(x)$，在点 $M(x,y)$ 处的曲率 $K\neq 0$，在点 $M(x,y)$ 处的法线上沿曲线凹向一侧取一点 D，使得 $|MD|=\frac{1}{K}=\rho$，以 D 为圆心，以 ρ 为半径作圆，这个圆叫作曲线在点 $M(x,y)$ 的曲率圆. 点 D 称为曲线在点 $M(x,y)$ 处的曲率中心，ρ 称为在点 $M(x,y)$ 处的曲率半径，如图 3-8 所示.

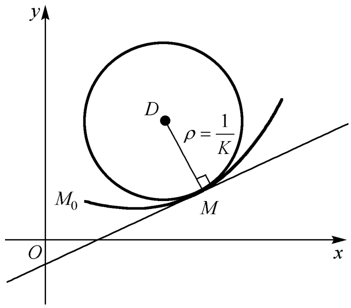


图 3-8

习题 3.6

1. 求下列曲线在任意点的曲率：

（1）$y=(x+2)^2$；　　（2）$y=\ln\sec x$.

2. 求抛物线 $y=x^2-2x-3$ 在顶点处的曲率及曲率半径.

3. 求双曲线 $xy=2$ 在点 $(1,2)$ 处的曲率及曲率半径.

第四章　一元函数积分学

一元函数积分学包含不定积分与定积分两部分. 由于在许多实际问题中已知某个函数的导数，要求这个函数，由此引出原函数和不定积分的概念；同时，在许多实际问题中要求解图形的面积和体积等，而它们都可归结为极小量的无穷累加问题，由此引出定积分的概念. 本章先介绍不定积分的概念、性质及计算方法，然后介绍定积分的概念、性质、计算方法及其在几何学和物理学中的一些应用.

第一节　不定积分的概念与性质

一、原函数与不定积分的概念

定义 1.1　设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数，若存在函数 $F(x)$，使得对任何 $x\in I$ 均有

$$F'(x)=f(x) \quad 或 \quad \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x,$$

则称函数 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

例如，因为 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，所以 $\ln x$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数. 因为 $(\ln x+2)'=\dfrac{1}{x}$，所以 $\ln x+2$ 也是的 $\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数.

由以上两个例子可知：一个函数的原函数并不唯一.

若 $F'(x)=f(x)$，则有 $[F(x)+C]'=f(x)$（C 为任意常数）. 因此，$F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数.

设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，则

$$[F(x)-G(x)]'=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0,$$

即 $F(x)-G(x)=C$（C 为任意常数）.

从以上可得结论：一个函数的任意两个原函数之间相差一个常数.

由此可知，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则 $f(x)$ 的全体原函数为 $F(x)+C$（C 为任意常数）.

定义 1.2　函数 $f(x)$ 在区间 I 上的所有原函数称为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分，记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $\int$ 称为积分符号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)dx$ 称为积分表达式，x 称为积分变量.

由定义 1.2 可知，若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分.

注：函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线.

由此可知，对 $f(x)$ 只需求出它的一个原函数，再加上任意常数即可得到它的不定积分.

例 1　求$\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

解　因为$\left(-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}$，所以

$$\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}+C.$$

例 2　求$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解　因为$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$，所以

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C.$$

例 3　设曲线通过点$(1,0)$，且曲线上任一点处的切线斜率等于该点横坐标的倒数，试求此曲线的方程.

解　设该曲线的方程为$y=f(x)$，由题意知$f'(x)=\frac{1}{x}$，所以

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

当$x>0$时，$\ln x$是$\frac{1}{x}$的一个原函数，即是，当$x>0$时，

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C,$$

当$x<0$时，由于

$$[\ln(-x)]'=-\frac{1}{-x}=\frac{1}{x},$$

因此

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(-x)+C,$$

综上所得，当$x>0$与$x<0$时，有

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C.$$

又曲线通过点$(1,0)$，由$0=\ln 1+C$，可得$C=0$. 因此，该曲线的方程为

$$y=\ln|x|.$$

二、基本不定积分表

因为积分运算是微分运算的逆运算，由已知的导数公式表可得到下面的基本不定积分表：

（1）　$\int x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$（$n\neq -1$）；　　（2）$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$；

（3）$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$；　（4）$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$；

（5）$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$；　（6）$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$；

（7）$\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$；　（8）$\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$；

（9）$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$；　（10）$\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$；

（11）$\int a^x\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + C$（$a>0, a\neq -1$）；　（12）$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$；

（13）$\int \mathrm{sh}x\mathrm{d}x = \mathrm{ch}x + C$；　（14）$\int \mathrm{ch}x\mathrm{d}x = \mathrm{sh}x + C$.

例 4　求下列不定积分：

（1）$\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　（2）$\int 2^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解　（1）$\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1} + C = -2x^{-\frac{1}{2}} + C$；

（2）$\int 2^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int (2\mathrm{e})^x\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2\mathrm{e}}(2\mathrm{e})^x + C = \frac{2^x\mathrm{e}^x}{\ln 2+1} + C$.

三、不定积分的性质

需要说明的是，不是所有的函数都有原函数，原函数的存在性在这里不做讨论. 这里，先介绍一个结论：连续函数一定有原函数.

下面在假设原函数存在的条件下来研究原函数的性质.

性质 1　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)\mathrm{d}x$.

性质 2　$\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$.

性质 3　设 $f(x), g(x)$ 的原函数都存在，则

$$\int [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x.$$

证　显然，等式左边是 $f(x)\pm g(x)$ 的不定积分，对等式右边求导，得，

$\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x\right]' = \left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' \pm \left[\int g(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x)\pm g(x)$，则 $\int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$ 是 $f(x)\pm g(x)$ 的原函数，而且它含有任意常数，因而它是 $f(x)\pm g(x)$ 的不定积分，所以等式成立.

注：此性质可以推广到有限个函数之和的情况.

性质 4　设 $f(x)$ 的原函数存在，k 为非零常数，则

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x.$$

设 $f(x), g(x)$ 的原函数都存在，a,b 是不同时为零的常数，综合性质 3、4，可得

$$\int[af(x)\pm bg(x)]\mathrm{d}x=a\int f(x)\mathrm{d}x\pm b\int g(x)\mathrm{d}x.$$

例 5　求 $\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\cos x\right)\mathrm{d}x$.

解
$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\cos x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x-\int\cos x\mathrm{d}x=\arcsin x-\sin x+C.$$

例 6　求 $\int x\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

解
$$\int x\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\int\left(2x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int 2x\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=x^2-\ln|x|+C.$$

例 7　求 $\int\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解
$$\int\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{x^4-1+1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int x^2\mathrm{d}x-\int 1\mathrm{d}x+\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-x+\arctan x+C.$$

例 8　求 $\int\tan x(\tan x-\sec x)\,\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int\tan x(\tan x-\sec x)\,\mathrm{d}x&=\int(\tan^2 x-\tan x\sec x)\,\mathrm{d}x\\&=\int\tan^2 x\mathrm{d}x-\int\tan x\sec x\mathrm{d}x\\&=\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x-\sec x\\&=\tan x-x-\sec x+C\end{aligned}$$

例 9　求 $\int\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

解
$$\int\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$$
$$=\int\sec^2 x\mathrm{d}x+\int\csc^2 x\mathrm{d}x=\tan x-\cot x+C.$$

习题 4.1

1. 求下列不定积分.

（1）$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x}}$；　（2）$\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x$；　（3）$\int(2^x-x^3)\,\mathrm{d}x$；

（4）$\int\sqrt{x}(x-5)\,\mathrm{d}x$；　（5）$\int\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$；　（6）$\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

（7）$\int\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x$；　（8）$\int 3^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；　（9）$\int\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$；

（10）$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$.

2. 设 $\int xf(x)dx = e^{x^2} + C$，求 $f(x)$.

3. 一曲线通过点 $(1,2)$，且在任一点处的切线斜率为横坐标的 2 倍，求该曲线的方程.

4. 验证函数 $\arcsin(2x-1)$、$\arccos(1-2x)$、$2\arcsin\sqrt{x}$ 为同一个函数的原函数.

第二节　不定积分的换元积分法

能用基本积分表和不定积分的性质直接计算的不定积分是很少的，所以必须找到新的求不定积分的方法. 我们将复合函数求导法则反过来用于不定积分，通过适当的变量代换，得到求复合函数不定积分的方法称为换元积分法.

一、第一类换元法（凑微分法）

设 $f(u)$ 的原函数是 $F(u)$，有

$$F'(u) = f(u), \int f(u)du = F(u) + C.$$

若 $u = \varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 可微，根据复合函数的微分法则，得

$$dF(\varphi(x)) = F'(\varphi(x))\varphi'(x)dx = f(\varphi(x))\varphi'(x)dx,$$

于是由不定积分定义可知

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C = \left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}.$$

从而得到下述定理：

定理 2.1（第一类换元法） 设 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的原函数，$u = \varphi(x)$ 可导，那么

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)} = [F(u)+C]_{u=\varphi(x)} = F[\varphi(x)] + C.$$

因为在积分的过程中，需要先找到 $\varphi(x)$，然后从被积表达式中凑出 $d\varphi(x) = \varphi'(x)dx$，所以第一类换元法也叫作凑微分法.

例 1 求 $\int (3x+2)^5 dx$.

解

$$\int (3x+2)^5 dx = \frac{1}{3}\int (3x+2)^5 (3x+2)'dx = \frac{1}{3}\int (3x+2)^5 d(3x+2)$$

$$\xlongequal{3x+2=u} \frac{1}{3}\int u^5 du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^6}{6} + C = \frac{u^6}{18} + C = \frac{1}{18}(3x+2)^6 + C.$$

注：事实上求形如 $\int f(ax+b)\,dx$ 的不定积分，一般都可通过变换 $u = ax+b$，把它化为

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,d(ax+b) = \frac{1}{a}\left[\int f(u)\,du\right]_{u=ax+b}.$$

例 2　求 $\int xe^{x^2}dx$.

解
$$\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}(x^2)'dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2)$$
$$\xlongequal{x^2=u}\frac{1}{2}\int e^u du=\frac{1}{2}e^u+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$$

在比较熟悉凑微分后，可省去中间变量和回代过程的书写.

例 3　求 $\int\frac{1}{x(1+2\ln x)}dx$.

解
$$\int\frac{1}{x(1+2\ln x)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1+2\ln x)}(1+2\ln x)'dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1+2\ln x)}d(1+2\ln x)$$
$$=\frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C.$$

例 4　求 $\int\frac{dx}{a^2+x^2}$.

解
$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{dx}{a^2\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$$

例 5　求 $\int\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

解
$$\int\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int\frac{dx}{1+(x+1)^2}=\arctan(x+1)+C.$$

注：此题结果可直接应用例 4 得到.

例 6　求 $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$.

解
$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

例 7　求 $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

解
$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(x+1)^2}}=\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

例 8　求 $\int\frac{dx}{a^2-x^2}$.

解
$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\int\frac{dx}{(a-x)(a+x)}=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2a}\int\frac{1}{a-x}dx+\frac{1}{2a}\int\frac{1}{a+x}dx=-\frac{1}{2a}\ln|a-x|+\frac{1}{2a}\ln|a+x|+C$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C.$$

例 9　求 $\int\sin^2 x\cos^3 x\mathrm{d}x$.

解
$$\int\sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x=\int\sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}(\sin x)=\int\sin^2 x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}(\sin x)$$
$$=\int(\sin^2 x-\sin^4 x)\mathrm{d}(\sin x)=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C.$$

例 10　求 $\int\cos^2 x\mathrm{d}x$.

解
$$\int\cos^2 x\mathrm{d}x=\int\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\int\cos 2x\,\mathrm{d}(2x)$$
$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

注：被积函数如果为三角函数的乘积时，拆开奇次项凑微分；如果被积函数是三角函数的偶数次幂时，通过降幂得到想要的结果.

例 11　求 $\int\tan x\mathrm{d}x$.

解
$$\int\tan x\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)=-\ln|\cos x|+C.$$

相同的方法可得
$$\int\cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C.$$

例 12　求 $\int\csc x\mathrm{d}x$.

解
$$\int\csc x\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$
$$=\int\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C=\ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right|+C=\ln\left|\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}\right|+C$$
$$=\ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|+C=\ln|\csc x-\cot x|+C.$$

类似可得 $\int\sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$.

注：检验积分结果是否正确，可以对积分结果进行求导，若求导结果与被积函数相等，则结果正确，否则错误.

二、第二类换元法

若用基本积分表和第一类换元法对不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 进行积分都失效，那么可考虑进行适当的变量代换，令 $x=\varphi(t)$，得到关于新的积分变量 t 的不定积分

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t,$$

利用它能得到不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$的结果，这就是第二类换元法.

定理 2.2（第二类换元法） 设$x=\varphi(t)$是单调、可导函数，且$\varphi'(t)\neq 0$，又$f(\varphi(t))\varphi'(t)$具有原函数$F(t)$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C=F(\varphi^{-1}(x))+C,$$

其中$t=\varphi^{-1}(x)$是$x=\varphi(t)$的反函数.

注： 由定理 2.2 可知，第二类换元法和第一类换元法的换元和回代过程是相反的.

例 13 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}$.

解 为了去掉根号，令$\sqrt{x}=t$，则$x=t^2,\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}=\int\frac{2t\mathrm{d}t}{t^2+t}=2\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}=2\ln(t+1)+C=2\ln(\sqrt{x}+1)+C.$$

例 14 求$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x$.

解 为了同时去掉所有根号，令$\sqrt[6]{x}=t$，那么$x=t^6,\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$，从而

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x&=\int\frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}\mathrm{d}t=6\int\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=6\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}\mathrm{d}t=6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\\&=6(t-\arctan t)+C=6(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x})+C.\end{aligned}$$

例 15 求$\int\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x$.

解 为了去掉根号，那么令$\sqrt{1+\mathrm{e}^x}=t^2,x=\ln(t^2-1),\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2-1}$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x&=\int\frac{2t}{t(t^2-1)}\mathrm{d}t=\int\frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\ln\frac{t-1}{t+1}+C\\&=2\ln(\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1)-x+C.\end{aligned}$$

注： 若被积函数含有$\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$，一般常通过代换$\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$，达到去根号的目的.

例 16 求$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$（$a>0$）.

解 $x=a\sin t\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，那么$\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x&=\int a\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)+C\\&=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.\end{aligned}$$

例 17　求 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x$ （$a>0$）.

解　令 $x=a\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，那么 $\mathrm{d}x=a\sec^2 t\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\mathrm{d}t=\int \sec t\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C_1,$$

其中，$C_1=C-\ln a$.

例 18　求 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x$ （$a>0$）.

解　先设 $x>a$，令 $x=a\sec t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$，那么 $\mathrm{d}x=a\tan t\sec t\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{a\tan t\sec t}{a\tan t}\mathrm{d}t=\int \sec t\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C$$

$$=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C_1,$$

其中 $C_1=C-\ln a$.

当 $x<-a$，$x=a\sec t\left(\frac{\pi}{2}<t<\pi\right)$ 时，相似的方法可得到一样的结果.

除了基本积分表中的公式，再补充本节例题中的几个不定积分作为基本不定积分表.

（1）$\int \tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$；　（2）$\int \cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$；

（3）$\int \sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$；　（4）$\int \csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$；

（5）$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{|a+x|}{|a-x|}+C$；　（6）$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$；

（7）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$；　（8）$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C_1$；

（9）$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$；

（10）$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$.

习题 4.2

1. 填空使下列等式成立.

（1）$\mathrm{d}x=$____$\mathrm{d}(4x-5)$；（2）$x^2\mathrm{d}x=$____$\mathrm{d}(1-x^3)$；（3）$x^3\mathrm{d}x=$____$\mathrm{d}(2x^4-3)$；

（4）$\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x=$____$\mathrm{d}(\mathrm{e}^{3x})$；（5）$\frac{\mathrm{d}x}{x}=$____$\mathrm{d}(3\ln|x|)$；（6）$\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$____$\mathrm{d}(\sqrt{x})$.

2. 求下列不定积分.

（1）$\int (5-3x)^4\mathrm{d}x$；　（2）$\int \frac{1}{3-5x}\mathrm{d}x$；　（3）$\int x^4\sqrt{1+x^5}\mathrm{d}x$；

（4）$\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　（5）$\int (x\cos x^2 - e^{\frac{x}{4}})dx$；　（6）$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$；

（7）$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$；　（8）$\int \frac{dx}{x\ln x}$；　（9）$\int \cos^3 x dx$；

（10）$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$；　（11）$\int \sin^2 x dx$；　（12）$\int \sec^4 x dx$；

（13）$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}dx$；　（14）$\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$；　（15）$\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$；

（16）$\int \frac{dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$；　（17）$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$；　（18）$\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$；

（19）$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$；　（20）$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$；　（21）$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

第三节　不定积分的分部积分法

在上一节中利用复合函数的求导法则得到了不定积分的换元积分法，但是有些积分，如$\int xe^x dx$、$\int x\sin x dx$等，用换元积分法却无法得到其结果，因此本节将在两个函数乘积微分法的基础上，推导出另一种基本积分法——分部积分法.

设函数$u=u(x)$与$v=v(x)$具有连续导数，则

$$d(uv)=u'vdx+uv'dx,$$

移项得到

$$uv'dx=d(uv)-u'vdx,$$

对上式两边同时积分，有

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx \tag{3.1}$$

或

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{3.2}$$

（3.1）式和（3.2）式都称为不定积分的分部积分公式.

下面通过例子说明怎样运用这个重要的公式.

例 1　求$\int x\sin x dx$.

解　令$u=x$，$v'=\sin x$，则$u'=1$，$v=-\cos x$，那么

$$\int x\sin x dx = x(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx = \sin x - x\cos x + C.$$

如果令$u=\sin x$，$v'=x$，则$u'=\cos x$，$v=\frac{x^2}{2}$，代入（3.1）式，得

$$\int x\sin x dx = \frac{x^2}{2}\sin x - \int \frac{x^2}{2}\cos x dx,$$

上式右边的积分比原积分复杂，更不容易求出.

由此可知，u 和 v' 的选取是非常关键的，如果选取不当，积分的结果便无法求出. 怎样选取 u 和 v' 呢?一般要遵循以下原则：

（1）v' 的原函数 v 要容易求得；

（2）不定积分 $\int u'v\mathrm{d}x$ 要比 $\int uv'\mathrm{d}x$ 容易积出.

例 2 求 $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解 令 $u=x$，$v'=\mathrm{e}^x$，则

$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int x'\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C = \mathrm{e}^x(x-1)+C.$$

例 3 求 $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解 令 $u=x^2$，$v'=\mathrm{e}^x$，则

$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x &= x^2\mathrm{e}^x - \int (x^2)'\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - \int 2x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \\ &= x^2\mathrm{e}^x - 2\left(x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right) = x^2\mathrm{e}^x - 2(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x) + C.\end{aligned}$$

注： 如果被积函数是幂函数（指数为正整数）和正（余）弦函数或指数函数的乘积时，一般选幂函数为 u. 运用一次分部积分，可使幂函数降幂一次.

例 4 求 $\int x\arctan x\mathrm{d}x$.

解 令 $u=\arctan x$，$v'=x$，则

$$\begin{aligned}\int x\arctan x\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2}(\arctan x)'\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}(x-\arctan x)+C.\end{aligned}$$

例 5 求 $\int x^3\ln x\mathrm{d}x$.

解 令 $u=\ln x$，$v'=x^3$，则

$$\begin{aligned}\int x^3\ln x\mathrm{d}x &= \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}(\ln x)'\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^3}{4}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16}+C.\end{aligned}$$

注： 如果被积函数是幂函数和对数函数或反三角函数的乘积时，一般选对数函数或反三角函数为 u.

例 6 求 $\int \arcsin x\mathrm{d}x$.

解 虽然被积函数只有 $\arcsin x$，但是可以把它看作 1 和 $\arcsin x$ 的乘积，就可令 $u=\arcsin x$，$v'=1$，则

$$\int \arcsin x\mathrm{d}x = \int 1\cdot \arcsin x\mathrm{d}x = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\arcsin x - \left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

例 7　求 $\int \ln x\mathrm{d}x$.

解　$$\int \ln x\mathrm{d}x = \int 1\cdot \ln x\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C .$$

例 8　求 $\int \mathrm{e}^x \sin x\mathrm{d}x$.

解　令 $u=\sin x$， $v'=\mathrm{e}^x$， 则

$$\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x(\sin x)'\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{e}^x\sin x - [\mathrm{e}^x\cos x - \int \mathrm{e}^x(\cos x)'\mathrm{d}x] = \mathrm{e}^x\sin x - \mathrm{e}^x\cos x - \int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x ,$$

上式等式两边都有 $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$，而且等式右边的其他部分不含有不定积分，所以把右边的 $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$ 移到左边，两边同除以 2，得

$$\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + C .$$

换元积分法和分部积分法都是常用的积分方法. 它们既可以单独使用，也可以联合使用.

例 9　求 $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解　因被积函数含有根式，需先用换元法去掉根号，令 $\sqrt{x}=t, x=t^2$， $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^t 2t\mathrm{d}t = 2\int \mathrm{e}^t t\mathrm{d}t = 2(t-1)\mathrm{e}^t + C = 2(\sqrt{x}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + C .$$

例 10　已知 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{-x^2}，求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

解　由分部积分法的公式可得

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x) - \int x'f(x)\,\mathrm{d}x = xf(x) - \int f(x)\,\mathrm{d}x ,$$

根据已知得

$$f(x) = (\mathrm{e}^{-x^2})' = -2x\mathrm{e}^{-x^2}, \int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-x^2} + C ,$$

所以

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x = -2x^2\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{-x^2} + C = (1-2x^2)\mathrm{e}^{-x^2} + C .$$

习题 4.3

1. 求下列不定积分：

（1） $\int x\cos x\mathrm{d}x$；　（2） $\int x\sin 2x\mathrm{d}x$；　（3） $\int x\tan^2 x\mathrm{d}x$；　（4） $\int \arctan x\mathrm{d}x$；

（5）$\int \ln(x+1)\mathrm{d}x$；（6）$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；（7）$\int \mathrm{e}^x \cos x\mathrm{d}x$；（8）$\int x\arccos x\mathrm{d}x$；

（9）$\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$；（10）$\int x^2 \sin x\mathrm{d}x$；（11）$\int x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；（12）$\int x\ln^2 x\mathrm{d}x$.

2. 若 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求不定积分 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

第四节　定积分的概念与性质

定积分是积分学的又一个重要概念. 定积分起源于求解图形的面积和体积等实际应用问题，在研究这些问题的过程中逐渐得出了积分和微分之间的内在联系，从而给出了定积分的计算方法，使定积分成为解决自然科学和生产实践中问题的强有力工具. 本节将从定积分的几何意义和它在物理中的应用入手，引出定积分的概念，然后讨论定积分的性质、计算方法以及定积分的应用.

一、引例

1. 曲边梯形的面积

设 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上非负、连续. 在直角坐标系中，由曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a,x=b$ 和 x 轴所围成的图形（如图 4-1 所示）称为曲边梯形，其中曲线弧称为曲边，x 轴上对应区间 $[a,b]$ 的线段称为底边.

我们知道，矩形的面积公式为：矩形面积=底×高，但是曲边梯形的面积该如何计算呢？曲边梯形底边上各点处的高 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是不断变化的，因此我们不能直接利用上述公式计算曲边梯形的面积. 但 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续的，则在小区间长度很短时，它的改变非常小，可以近似地看做不变. 因而，可以采取如下方法.

（1）分割. 在区间 $[a,b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点

$$a=x_0<x_1<x_2\cdots\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

则 $[a,b]$ 被分为 n 个小区间

$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ \cdots,\ [x_{n-1},x_n],$$

其长度分别为

$$\Delta x_1=x_1-x_0,\ \Delta x_2=x_2-x_1,\ \cdots,\ \Delta x_n=x_n-x_{n-1}.$$

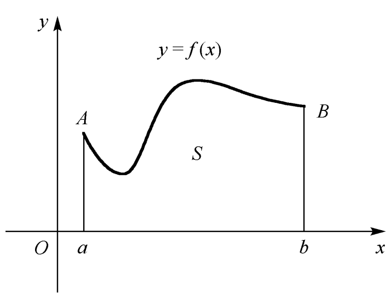


图 4-1

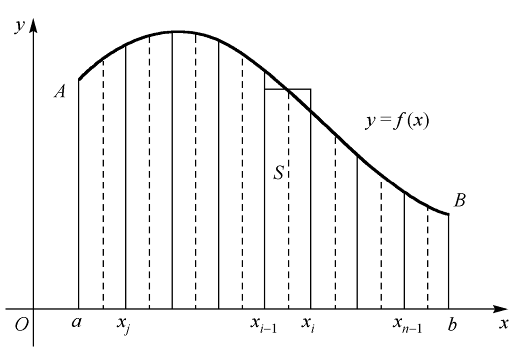


图 4-2

过每一个分点作平行于 y 轴的直线 $x=x_i$，将曲边梯形分为 n 个小曲边梯形（见图 4-2）.

（2）近似. 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，用以 $[x_{i-1},x_i]$ 为底，$f(\xi_i)$ 为高的小矩形来近似代替第 i 个小曲边梯形，那么第 i 个小曲边梯形的面积 ΔA_i 近似为 $f(\xi_i)\Delta x_i$（$i=1,2,\cdots,n$）.

（3）求和. 把这样得到的 n 个小矩形的面积累加作为曲边梯形面积的近似值，即

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i .$$

（4）取极限. 为了让每一个小区间的长度的都趋于零，为此，令

$$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_{n-1},\Delta x_n\}\to 0,$$

对上述和式求极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i ,$$

若该极限存在，就称它为曲边梯形的面积，即

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i .$$

2. 变速直线运动的路程

在初中物理中我们就学过匀速直线运动求路程的公式，即

路程=速度×时间.

但若某物体做变速直线运动，即速度 $v(t)$ 是时间 t 的连续函数，该如何求它在某段时间内的路程呢？在这个问题中，速度 $v(t)$ 是连续变化的，显然当时间变化很小时速度的变化也很小，为此采用与上述计算面积相同的方法.

（1）分割. 在时间间隔 $[T_1,T_2]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点

$$T_1=t_0<t_1<t_2\cdots\cdots<t_{n-1}<t_n=T_2,$$

则 $[T_1,T_2]$ 被分为 n 个小区间 $[t_0,t_1]$，$[t_1,t_2]$，$\cdots$，$[t_{n-1},t_n]$，其长度分别为

$$\Delta t_1=t_1-t_0,\quad \Delta t_2=t_2-t_1,\quad \cdots,\quad \Delta t_n=t_n-t_{n-1}.$$

（2）近似. 在每个小时间间隔 $[t_{i-1},t_i]$ 上任取一点 τ_i，以 τ_i 处的速度 $v(\tau_i)$ 代替 $[t_{i-1},t_i]$ 上各点处的速度，则在时间间隔 $[t_{i-1},t_i]$ 内所走的路程近似为 $v(\tau_i)\Delta t_i$（$i=1,2,\cdots,n$）.

（3）求和. 把得到的 n 个小时间间隔所走的路程累加起来作为所求路程的近似值，即

$$s\approx\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i .$$

（4）取极限. 为了让每一个小区间的长度的都趋于零，为此，令

$$\lambda=\max\{\Delta t_1,\Delta t_2,\cdots,\Delta t_{n-1},\Delta t_n\}\to 0,$$

对上述和式求极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i ,$$

若该极限存在，则是变速直线运动的路程，即

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i \text{ .}$$

二、定积分的定义

上述的两个引例，一个是求曲边梯形面积的问题，另一个是求变速直线运动路程的问题，虽然是两个性质完全不同的问题，但通过“分割、近似、求和、取极限”四步，都能转化为形如$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$的和式的极限问题. 由此抽象出定积分的定义：

定义 4.1　设$f(x)$在区间$[a,b]$上为有界函数，

（1）分割. 在$[a,b]$内任意插入$n-1$个分点：

$$a=x_0<x_1<x_2\cdots\cdots<x_{n-1}<x_n=b\text{ ,}$$

则$[a,b]$被分为n个小区间$[x_0,x_1]$，$[x_1,x_2]$，$\cdots$，$[x_{n-1},x_n]$，记每一个小区间的长度为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$；

（2）近似. 在每一个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点ξ_i，则乘积$f(\xi_i)\Delta x_i$（$i=1,2,\cdots,n$）；

（3）求和. 将（2）所得的值累加起来，得$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$；

（4）取极限. 记$\lambda=\max\left\{\Delta x_i\middle|1\leqslant i\leqslant n\right\}$，如果不论对区间$[a,b]$怎样分割，也不论在$[x_{i-1},x_i]$上怎样选取$\xi_i$，总有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=I$$

成立（其中I是一个常数），则称$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，并称此极限值I为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分，记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\text{ ,}$$

其中$f(x)$为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$为积分表达式，x为积分变量，$[a,b]$为积分区间，a,b分别为积分的下限和上限，和式$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$为积分和式，也称作黎曼和.

根据积分定义，引例中的曲边梯形面积记为$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，变速直线运动经过的路程记为$s=\int_{T_1}^{T_2}v(t)\mathrm{d}t$.

由定积分的定义可知，定积分是$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$的极限，是一个数值，这个数仅与被积函数$f$及积分区间有关，而与积分变量所采用的哪个字母无关，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\text{ .}$$

定义中要求函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，这是定积分可积的必要条件，那么函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足怎样的条件才一定可积呢？这个问题本书不再深入讨论，只给出以下两个定理：

定理 4.1　如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

定理 4.2　如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

例 1　利用定积分的定义计算定积分 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

解　因为 $f(x)=x^2$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以是可积的，从而定积分的值与区间 $[0,1]$ 的分法和 ξ_i 的选取无关. 不妨将 $[0,1]$ n 等分，分点为 $\frac{i}{n}$ （ $i=1,2,\cdots,n-1$ ），这样每个区间 $[x_{i-1},x_i]$ 长度为 $\lambda=\frac{1}{n}$， ξ_i 取每个区间的右端点 $\frac{i}{n}$ （ $i=1,2,\cdots,n$ ），则得到的积分和式为

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$$

$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),$$

当 $\lambda\to 0$ 即 $n\to\infty$ 时，有

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}.$$

下面探讨一下定积分的几何意义，当区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)\geqslant 0$ 时，由引例 1 知，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义为由曲线 $y=f(x)$ 、直线 $x=a$、$x=b$ 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积. 若区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)<0$ 时，则曲边梯形位于 x 轴的下方，那么 $f(\xi_i)<0$ ，而 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}>0$ ，因此 $f(\xi_i)\Delta x_i<0$ ，从而极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i<0$ ，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值为负，这时，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值为曲线 $y=f(x)$ 、直线 $x=a,x=b$ 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积的相反数.

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有正有负，该定积分就等于在上方的图形面积减去 x 轴下方的图形面积. 如图 4-3 所示的例子中，定积分

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A_1-A_2+A_3\ ,$$

其中 A_1、A_2、A_3 分别代表图中相应曲边梯形的面积.

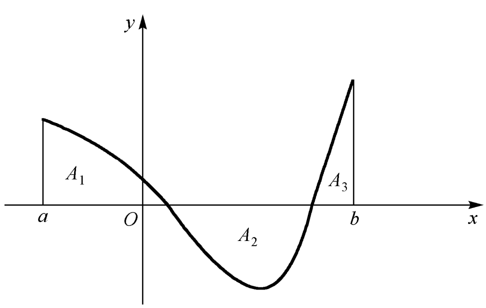


图 4-3

例 2　应用定积分的几何意义求 $\int_0^1 x\mathrm{d}x$.

解　由定积分的几何意义，该定积分是由直线 $x=0,y=x,x=1$ 所围成的三角形的面积，该三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$，因此

$$\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

三、定积分的性质

为了以后定积分的运算和使用的方便性，我们对定积分作如下两点规定：

（1）当 $a=b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$；

（2）当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

下面介绍定积分的性质，在随后的讨论中，如无特别指出，对定积分的上下限的大小没有限制，并且假定积分都是可积的.

性质 1 $\int_a^b c\mathrm{d}x=c(b-a)$（$c$ 为常数）；

特别是当 $c=1$ 时，有 $\int_a^b 1\cdot\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$.

性质 2 $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

性质 3 $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$（$k$ 为常数）.

综合性质 2 和性质 3，可得

$$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad（\alpha,\beta \text{ 为常数}）.$$

性质 4（区间可加性）$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b g(x)\mathrm{d}x$.

性质 5（比较定理）若在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant g(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

推论 1（保号性）若在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant 0$，则有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.

推论 2（估值不等式）若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最小值和最大值分别为 m,M，有

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a).$$

推论 3（绝对值可积性）若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上一定可积，且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

性质 6（积分中值定理）若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

证 因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有最小值 m 和最大值 M，由性质 5 的推论 2 可得

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a),$$

上述不等式两边同除以 $b-a$，得

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M,$$

这说明 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 介于最小值 m 和最大值 M 之间，由闭区间上连续函数的介值定理知，至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi),$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

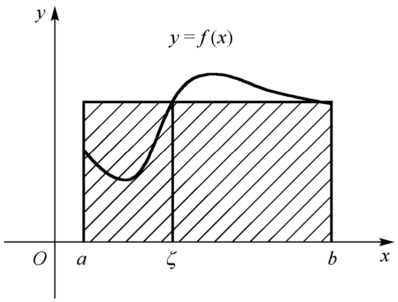


图 4-4

积分中值定理有着明显的几何意义，如图 4-4 所示：

在区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得以 $[a,b]$ 为底、以曲线 $f(x)$ 为顶的曲边梯形的面积，等于以 $[a,b]$ 为底、高为 $f(\xi)$ 的矩形的面积.

例 3　估计定积分 $I=\int_0^{2\pi}(2+\sin x)\mathrm{d}x$ 的值.

解　设 $f(x)=2+\sin x$，在区间 $[0,2\pi]$ 上显然 $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$，又 $f(3\pi/2)=1$，$f(\pi/2)=3$，于是函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的最小值为 $m=1$，最大值 $M=3$，而区间长度 $b-a=2\pi$，根据 $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$，得 $2\pi \leqslant I \leqslant 6\pi$.

例 4　证明 $\frac{2}{5} \leqslant \int_1^2 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}$.

解　设 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$，则 $f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$，在区间 $[1,2]$ 上 $f'(x) \leqslant 0$，于是函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上单调减少，所以 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最小值为 $m=f(2)=2/5$，最大值 $M=f(1)=1/2$，而区间长度 $b-a=1$，根据 $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$，得 $\frac{2}{5} \leqslant \int_1^2 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}$.

例 5　比较 $\int_{-2}^0 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 与 $\int_{-2}^0 x\mathrm{d}x$ 的大小.

解　因为在区间 $[-2,0]$ 上 $\mathrm{e}^x > x$，所以 $\int_{-2}^0 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x > \int_{-2}^0 x\mathrm{d}x$.

例 6　证明 $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x$.

证明　设 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-x$，在区间 $[0,1]$ 上，$f'(x)=\mathrm{e}^x-1 \geqslant 0$，于是函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调增加，从而 $f(x) \geqslant f(0)=0$，即在区间 $[0,1]$ 上 $\mathrm{e}^x \geqslant 1-x$，所以 $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x$.

习题 4.4

1. 试将下列极限表示成定积分.

（1）$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i^2-3\xi_i)\Delta x_i$，$\lambda$ 是$[-7,5]$上的分割；

（2）$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{4-\xi_i^2}\Delta x_i$，$\lambda$ 是$[0,1]$上的分割.

2. 利用定积分的几何意义求下列定积分的值.

（1）$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$；　（2）$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$.

3. 估计下列积分的值.

（1）$\int_0^{2\pi}(2+\sin x)\mathrm{d}x$；　（2）$\int_0^2(x^2-2x+3)\mathrm{d}x$；　（3）$\int_0^1\arctan x\mathrm{d}x$.

4. 比较下列各组定积分的大小.

（1）$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$，$\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$；　（2）$\int_1^2\sqrt{x}\mathrm{d}x$，$\int_1^2\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x$；　（3）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\mathrm{d}x$，$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\mathrm{d}x$.

5. 假定$f(x)$是连续的，而且$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=3$和$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=7$，求下列定积分的值.

（1）$\int_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x$；　（2）$\int_4^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

第五节　微积分基本公式

若利用定积分定义来计算定积分，则要求一个复杂和式的极限，在第一节中我们假设被积函数是x^2，利用定积分定义进行计算，其计算过程已经很烦琐了，如果被积函数是比较复杂的函数，其困难程度可想而知. 因此，必须找到简单易行的方法计算定积分，以方便定积分的研究.

先看一个实例：

在第四节讨论了变速直线运动问题，设物体以速度$v(t)$沿直线从时刻$t=a$移动到$t=b$，那么这段时间内运动的路程为$\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$. 若已知物体的路程函数$s=s(t)$，则从$t=a$到$t=b$ $(a<b)$所通过的位移是$s(b)-s(a)$，由此可知

$$\int_a^b v(t)\mathrm{d}t=s(b)-s(a).$$

另一方面$s'(t)=v(t)$，即路程函数$s(t)$是速度函数$v(t)$的原函数. 上式说明，$v(t)$在$[a,b]$上的定积分等于它的原函数$s(t)$在$[a,b]$上的增量.

若不考虑它的物理意义，这一结论是否对任意函数都成立呢？即，如果$f(x)$的一个原函数为$F(x)$，那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

是否成立呢？下面具体讨论.

一、积分上限的函数

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，x 是 $[a,b]$ 上的一点，则由定积分 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 所定义的关于 x 的函数称为积分上限的函数（或是变上限的定积分）.

如图 4-5 所示，当 $f(x)\geqslant 0$ 时，由定积分的几何意义可知积分上限的函数所表示的意义为：$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 代表的是图 4-5 中阴影部分的面积，即 $F(x)$. 该面积的值随 x 变化而变化，当 x 为定值时，面积 $F(x)$ 随之为定值.

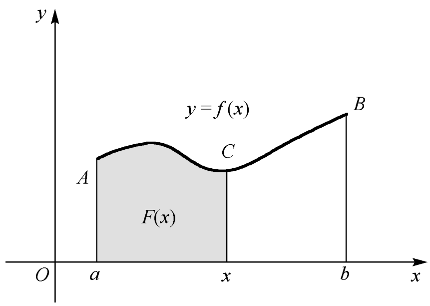


图 4-5

关于函数 $F(x)$ 的性质有如下定理.

定理 5.1　函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则其积分上限的函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导，并且其导数等于被积函数在积分上限处的值，即 $F'(x)=f(x)$.

证　给自变量 x 一增量 Δx 时，$F(x)$ 的增量为

$$\begin{aligned}\Delta F(x)&=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{\text{积分中值定理}}f(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x\quad(0<\theta<1),\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}F'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x}=f(x).\end{aligned}$$

通过定理 5.1 可知以下两点：

（1）积分上限的函数的导数等于被积函数在积分上限的函数值，这表明积分上限的函数是被积函数的一个原函数，这揭示了导数与定积分之间的内在联系.

（2）同时给出了在区间 I 上连续的函数 $f(x)$ 一定有原函数，并且

$$\int f(t)\mathrm{d}t=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C,$$

其中，a 为区间 I 上任意一点.

例 1　设 $F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$.

解　由定理 5.1 可知，$F'(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$.

例 2　设 $F(x)=\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^2\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$.

解　将 $F(x)$ 看作函数 $G(y)=\int_0^y \sin t^2\mathrm{d}t$ 和 $y=\sqrt{x}$ 的复合函数，于是由复合函数的求导法则，得

$$F'(x)=G'(y)\cdot y'_x=\sin y^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}.$$

例 3　求 $F(x)=\int_{x^2}^{\mathrm{e}^x}\ln t\mathrm{d}t$ 的导数.

解　因 $F(x)=\int_{x^2}^{\mathrm{e}^x}\ln t\mathrm{d}t=\int_{x^2}^{0}\ln t\mathrm{d}t+\int_0^{\mathrm{e}^x}\ln t\mathrm{d}t=\int_0^{\mathrm{e}^x}\ln t\mathrm{d}t-\int_0^{x^2}\ln t\mathrm{d}t$，则

$$F'(x)=\left(\int_0^{\mathrm{e}^x}\ln t\mathrm{d}t\right)'-\left(\int_0^{x^2}\ln t\mathrm{d}t\right)'=\ln\mathrm{e}^x\cdot(\mathrm{e}^x)'-\ln x^2\cdot(x^2)'=x(\mathrm{e}^x-2\ln x^2).$$

例 4　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t\mathrm{d}t}{\sin^6 x}$.

解
$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t\mathrm{d}t}{\sin^6 x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t\mathrm{d}t}{x^6}=\lim_{x\to0}\frac{2x-2x\cos x^2}{6x^5}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^4}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^4}{2}}{x^4}=\frac{1}{6}.$$

二、牛顿—莱布尼兹公式

通过对积分上限的函数的研究，我们得到了科学发展史上非常重要的一个公式——牛顿—莱布尼兹公式.

定理 5.2　如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).\tag{5.1}$$

（5.1）式为牛顿—莱布尼兹公式.

证　已知函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，由定理 5.1 知，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，因此

$$F(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=C\ （C\text{ 为常数}），$$

当 $x=a$ 时，有 $F(a)-\int_a^a f(t)\mathrm{d}t=C$，则 $C=F(a)$；当 $x=b$ 时，有 $F(b)-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(a)$，则

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

牛顿—莱布尼兹公式也常记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$，而且也称它为微积分基本公式.

例 5　求定积分$\int_{-3}^{-2} \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$.

解
$$\int_{-3}^{-2} \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln|1+x|\Big|_{-3}^{-2} = 0 - \ln 2 = -\ln 2.$$

例 6　求定积分$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{1/2} = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

例 7　求不定积分$\int_0^{\pi} |\cos x|\mathrm{d}x$.

解
$$\int_0^{\pi} |\cos x|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^{\pi/2} - \sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 1 - 0 - (0-1) = 2.$$

习题 4.5

1. 求下列函数的导数：

（1）$y = \int_1^x \sin \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$；　（2）$y = \int_0^{\sqrt[3]{x}} \cos(t^2+1)\,\mathrm{d}t$；

（3）$y = \int_{x^2}^5 \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$；　（4）$y = \int_{x^2}^{2x} \sqrt{1+t^3}\mathrm{d}t$.

2. 计算下列定积分：

（1）$\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$；　（2）$\int_1^4 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$；　（3）$\int_0^{\sqrt{3}a} \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$；

（4）$\int_0^{\pi} (1-2\sin x)\mathrm{d}x$；　（5）$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x\mathrm{d}x$；　（6）$\int_0^2 \sqrt{x^2-2x+1}\mathrm{d}x$；

（7）$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$，其中 $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x, & x<1, \\ x, & x \geqslant 1. \end{cases}$

3. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 \mathrm{d}t}{x^3}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} t^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t}{\int_0^x t(t-\sin t)\,\mathrm{d}t}$；（3）$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x \arctan t\mathrm{d}t}{x^2}$.

4. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，
$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \int_b^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t,\quad x \in [a,b],$$
证明：方程 $F(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 上有且只有一个根.

第六节 定积分的换元积分法和分部积分法

通过对牛顿—莱布尼兹公式的学习，我们知道，计算定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的问题可转化为求$f(x)$原函数在区间$[a,b]$上增量的问题. 因而在一定条件下，不定积分的换元积分法和分部积分法可应用在定积分的计算中. 本节将讨论具体做法，请读者注意其与不定积分的不同之处.

一、定积分的换元法

定理 6.1 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，函数$x=\varphi(t)$满足条件：

（1）$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$；

（2）$\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$（或$[\beta,\alpha]$）上具有连续导数$\varphi'(t)$，并且$\varphi(t)$的值域为$[a,b]$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \tag{6.1}$$

（6.1）式称为定积分的换元积分公式.

与不定积分换元法相比，在用定积分换元法时应特别注意换元的同时要变换积分限，而且积分限前后取值要对应.

例 1 求定积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x\mathrm{d}x$.

解法 1 由$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\mathrm{d}\cos x$，

令$\cos x=t, \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$，当$x=0$时，$t=1$；当$x=\dfrac{\pi}{2}$时，$t=0$，于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x\mathrm{d}x=-\int_1^0 t^5\mathrm{d}t=-\frac{1}{6}t^6\Big|_1^0=\frac{1}{6}.$$

对于第一类换元法（凑微分法）可不用新的变量t，直接计算如下.

解法 2 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\mathrm{d}\cos x=-\left[\frac{\cos^6 x}{6}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{6}$.

例 2 求定积分$\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

解
$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1).$$

例 3 求定积分$\int_1^9\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 令$\sqrt{x}=t$，$x=t^2$，则$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，当$x=1$时，$t=1$；当$x=9$时，$t=3$，

$$\begin{aligned}\int_1^9\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x&=2\int_1^3\frac{t^2}{1+t}\mathrm{d}t=2\int_1^3\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t\\&=t^2\Big|_1^3-4+2\ln(1+t)\Big|_1^3=4+2\ln 2\end{aligned}$$

例 4　求定积分 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

解　令 $x=a\sin t$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=a$ 时，$t=\dfrac{\pi}{2}$，

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}\pi a^2.$$

例 5　若函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续，证明：

（1）当 $f(x)$ 为偶函数时，$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$；

（2）当 $f(x)$ 为奇函数时，$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

证　因为 $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$，对积分 $\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$ 进行代换，令 $x=-t$，则

$$\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_a^0 f(-t)\,\mathrm{d}t=\int_0^a f(-t)\,\mathrm{d}t=\int_0^a f(-x)\,\mathrm{d}x,$$

所以
$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a f(-x)\,\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a [f(-x)+f(x)]\,\mathrm{d}x.$$

（1）当 $f(x)$ 为偶函数时，有 $f(-x)=f(x)$，得

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a [f(-x)+f(x)]\,\mathrm{d}x=\int_0^a 2f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x;$$

（2）当 $f(x)$ 为奇函数时，有 $f(-x)=-f(x)$，得

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a [f(-x)+f(x)]\,\mathrm{d}x=\int_0^a 0\,\mathrm{d}x=0.$$

例 6　求定积分 $\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x$.

解　因为积分区间关于原点对称，且 $\sin x$ 为奇函数，$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ 为偶函数，所以两者的乘积为奇函数，则

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x=0.$$

二、定积分的分部积分法

通过不定积分的换元法得到了定积分的换元法，同样由不定积分的分部积分法也可推出定积分的分部积分法.

定理 6.2　设函数 $u(x),v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的导数，则有

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=[u(x)v(x)]\big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x \tag{6.2}$$

（6.2）式为定积分的分部积分公式，与不定积分的分部积分公式不同之处为这里可将原函数已经积出的函数 $u(x)v(x)$ 先用上、下限代入.

例 7　求定积分 $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\mathrm{d}x$.

解
$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1.$$

例 8　求定积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\mathrm{d}x$.

解
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\mathrm{d}x = x\arcsin x\Big|_0^{1/2} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{12}+\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{1/2}$$
$$=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1.$$

例 9　求定积分 $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

解
$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^{-x}\Big|_0^1 = 1-\frac{2}{\mathrm{e}}.$$

例 10　求定积分 $\int_0^4 \ln(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$.

解　令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=4$ 时，$t=2$，于是
$$\int_0^4 \ln(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x = \int_0^2 2t\ln(1+t)\mathrm{d}t = t^2\ln(1+t)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{t^2}{1+t}\mathrm{d}t$$
$$=4\ln 3 - \int_0^2\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = 4\ln 3 - \left[\frac{t^2}{2}-t+\ln(1+t)\right]_0^2$$
$$=4\ln 3-\ln 3 = 3\ln 3.$$

习题 4.6

1. 计算下列定积分.

（1）$\int_{-2}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(11+5x)^3}$；　（2）$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\mathrm{d}x$；　（3）$\int_0^{\pi}(1+\sin^3 x)\,\mathrm{d}x$；

（4）$\int_0^5 \frac{x^3}{x^2+1}\mathrm{d}x$；　（5）$\int_{-1}^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+10}$；　（6）$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\mathrm{d}x$；

（7）$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1+\sqrt{\ln x}}{x}\mathrm{d}x$；　（8）$\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x}+1}$；　（9）$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\mathrm{d}x$；

（10）$\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$；　（11）$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$；　（12）$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\mathrm{d}x$.

2. 计算下列积分.

（1）$\int_0^{\pi} x\cos x\mathrm{d}x$；　（2）$\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；　（3）$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

（4）$\int_0^1 x^2 \arctan x \mathrm{d}x$；　（5）$\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x \cos x \mathrm{d}x$；　（6）$\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$.

3. 利用函数的奇偶性计算下列积分.

（1）$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^7}{1+\sin^4 x} \mathrm{d}x$；　（2）$\int_{-1}^{1} \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x$；　（3）$\int_{-1}^{1} (|x|+\sin x)x^2 \mathrm{d}x$.

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 1$，求 $\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$.

5. 证明：$\int_0^1 x^m (1-x)^n \mathrm{d}x = \int_0^1 x^n (1-x)^m \mathrm{d}x$.

第七节　反 常 积 分

由定积分的定义可知：

（1）定积分的积分区间为闭区间；

（2）被积函数在该区间上有界.

若不满足以上两条要求中的任何一条，定积分就不成立. 但是在许多实际问题中，我们会用到无穷区间的积分和无界函数的定积分，因此对定积分的上述两个约束条件放开，对定积分的定义加以推广. 无穷区间的积分和无界函数的定积分统称为反常积分或是广义积分.

一、无穷（限）积分

定义 7.1　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，如果极限

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分，记为 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{7.1}$$

这时也称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果上述极限不存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，这时 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 不再表示数值.

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[-\infty,b)$ 上连续，根据定义 7.1，可定义函数 $f(x)$ 在区间 $[-\infty,b)$ 上的反常积分为

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{7.2}$$

若 $\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的极限存在，称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；若 $\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的极限不存在，称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 7.2　设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, \tag{7.3}$$

其中 a 为任意常数（a 一般取为 0），当（7.3）式右端两个积分都收敛时，称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的；否则，称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

上述三种反常积分都称为无穷（限）积分.

设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$，记

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x), F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x),$$

则无穷积分可表示如下（若极限存在）：

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty)-F(a)=\lim_{x\to+\infty}F(x)-F(a);$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b)-F(-\infty)=F(b)-\lim_{x\to-\infty}F(x);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty)-F(-\infty).$$

例 1　求无穷积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

解　对任意的 $b>0$，有 $\int_0^b \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^b=1-\mathrm{e}^{-b}$，那么 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}(1-\mathrm{e}^{-b})=1-0=1$，即

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1.$$

例 2　判断无穷积分 $\int_0^{+\infty}\cos x\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解　对任意的 $b>0$，有 $\int_0^b \cos x\mathrm{d}x=\sin x\Big|_0^b=\sin b$，而 $\lim\limits_{b\to+\infty}\sin b$ 不存在，所以无穷积分 $\int_0^{+\infty}\cos x\mathrm{d}x$ 是发散的.

例 3　证明：反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$，当 $p>1$ 时收敛；当 $p\leqslant 1$ 时发散.

证明　当 $p=1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^{+\infty}=+\infty$；

当 $p\neq 1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1,\\ \dfrac{1}{p-1}, & p>1.\end{cases}$

因此，当 $p>1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛；当 $p\leqslant 1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

例 4　求无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\arctan x-\lim_{x\to-\infty}\arctan x$$

$$=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

例 5　讨论无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解　因 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$，且

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty}=+\infty,$$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 发散.

注：对无穷积分，只有在收敛的条件下才能使用“偶倍奇零”的性质，否则会出现错误.

二、被积函数具有无穷间断点的反常积分

定义 7.3　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$. 如果极限 $\lim\limits_{u\to a^+}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的反常积分，仍记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to a^+}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x$. 这时称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果 $\lim\limits_{u\to a^+}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x$ 的极限不存在，那么称反常积分发散.

同理，设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\infty$. 若极限 $\lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则令

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x,$$

这时称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果 $\lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 的极限不存在，那么称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上只有在 $c(a<c<b)$ 点不连续，且 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$，如果反常积分 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

也是收敛的，否则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

具有无穷间断点的反常积分也称为瑕积分，定义中函数 $f(x)$ 的无穷间断点称为瑕点.

设 $F(x)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，a 为 $f(x)$ 的一个瑕点，和无穷限积分的写法类似，可记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{a^+}^{b}=F(b)-F(a^+)=F(b)-\lim_{x\to a^+}F(x),$$

同理可得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{b^-}=F(b^-)-F(a)=\lim\limits_{x\to b^-}F(x)-F(a)$.

例 6 计算反常积分 $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$（$a>0$）.

解 因为 $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=+\infty$，所以 $x=a$ 为瑕点，

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^{a^-}=\lim_{x\to a^-}\arcsin\frac{x}{a}-\arcsin 0=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

例 7 讨论反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^q}\mathrm{d}x$（其中 $q>0$ 为常数）的敛散性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^q}=+\infty$，所以 $x=0$ 为瑕点.

当 $q=1$ 时，$\int_0^1 \frac{1}{x^q}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_{0^+}^1=\ln 1-\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=+\infty$；

当 $q\neq 1$ 时，$\int_0^1 \frac{1}{x^q}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-q}x^{1-q}\Big|_{0^+}^1=\frac{1}{1-q}-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1-q}x^{1-q}=\begin{cases}+\infty, & q>1;\\ \dfrac{1}{1-q}, & q<1.\end{cases}$

因此，当 $0<q<1$ 时，$\int_0^1 \frac{1}{x^q}\mathrm{d}x$ 收敛；当 $q\geqslant 1$ 时，$\int_0^1 \frac{1}{x^q}\mathrm{d}x$ 发散.

例 8 讨论反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$，所以 $x=0$ 为瑕点，则

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x,$$

又有 $2>1$，由例 7 可知，$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 发散，所以 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 发散.

若我们没有发现 $x=0$ 为函数 $\frac{1}{x^2}$ 的瑕点，而直接对 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 积分，就会得到这样一个错误的结论：$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1=-2$.

例 9 证明：反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$（$\alpha>1$）是发散的.

证 本题既是一个无穷积分，也是 $x=0$ 为瑕点的瑕积分，那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$$

由例 7 知，瑕积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 是发散的. 所以，广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 是发散的.

习题 4.7

1. 判断下列各反常积分的敛散性，若收敛，计算其值.

（1）$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$；（2）$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}$；（3）$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$（$a>0$）；

（4）$\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx$；（5）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+3}$；（6）$\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$；

（7）$\int_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}$；（8）$\int_1^e\frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln x}}$.

2. 利用递推公式计算反常积分 $I_n=\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx$.

第八节　定积分的应用

定积分在科学技术、生产实践的各个方面都有广泛的应用，正是这些广泛的应用不断推动着定积分的发展. 本节主要介绍定积分在几何、物理上的一些应用. 首先学习由实际问题建立积分表达式的基本思想和方法——微元法.

一、定积分的微元法

为了便于理解微元法，先来回顾第四节中由求解曲边梯形面积来建立定积分的过程.

设函数 $f(x)(f(x)\geqslant 0)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，求由曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a,x=b$ 和 $y=0$ 轴所围成的曲边梯形的面积 A.

（1）分割. 在区间 $[a,b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点

$$a=x_0<x_1<x_2\cdots\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

则 $[a,b]$ 被分为 n 个小区间，相应地将曲边梯形分为 n 个小曲边梯形.

（2）近似. 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，用以 $[x_{i-1},x_i]$ 为底，$f(\xi_i)$ 为高的小矩形来近似代替第 i 个小曲边梯形，那么第 i 个小曲边梯形的面积

$$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i(i=1,2,\cdots,n).$$

（3）求和. 把这样得到的 n 个小矩形的面积累加作为曲边梯形面积的近似值，即

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

（4）取极限. 为了让每一个小区间的长度都趋于零，为此，令

$$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_{n-1},\Delta x_n\}\to 0,$$

对上述合式求极限，得

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,dx.$$

上述步骤中最关键的步骤是第二步近似，在这一步得到了以 $[x_{i-1},x_i]$ 为底的第 i 个小曲边梯形的面积 ΔA_i 的近似值. 然后求和，求极限，从而得到定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$. 省略下标 i，把 $[x_{i-1},x_i]$ 记作 $[x,x+dx]$，用 ΔA 表示该小区间上的曲边梯形的面积，则

$$A=\sum\Delta A.$$

取 $[x,x+dx]$ 的左端点 x 为 ξ，以点 x 处的函数值 $f(x)$ 为高，dx 为底的矩形面积 $f(x)dx$ 作为 ΔA

的近似值（如图 4-6 中的阴影所示），即

$$\Delta A \approx f(x)\mathrm{d}x\,.$$

上式右端 $f(x)\mathrm{d}x$ 就称为面积微元，记作 $\mathrm{d}A = f(x)\mathrm{d}x$．求和得曲边梯形面积的近似值，即

$$A \approx \sum \mathrm{d}A = \sum f(x)\mathrm{d}x\text{，而 } A = \lim \sum f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

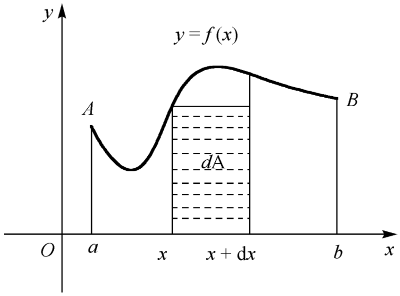


图 4-6

通过上述的分析，可以得出将所求量 U（总量）表示为定积分的方法——微元法，此方法的步骤如下.

（1）由分割得出微元：从具体问题入手，选择合适的积分变量，不妨设 x 为积分变量，并确定积分区间为 $[a,b]$，$[x,x+\mathrm{d}x]$ 为区间 $[a,b]$ 上的一个区间微元，求出对应这个区间微元的近似量，即得到总量 U 的微元 $\mathrm{d}U = f(x)\mathrm{d}x$.

（2）由微元得出积分：根据微元 $\mathrm{d}U = f(x)\mathrm{d}x$ 得出总量 U 的定积分，即

$$U = \int_a^b \mathrm{d}U = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

在几何学、物理学、经济学等领域中，微元法都有广泛的应用，本节主要讨论微元法在几何学、物理学方面的应用.

二、平面图形面积的计算

1. 直角坐标系下图形面积的计算

一般地，利用微元法可以得到如图 4-7 所示的由两条曲线 $y = f(x)$、$y = g(x)$（$f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x) \geqslant g(x)$），以及直线 $x = a, x = b$ 所围成的曲边形的面积为

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x\,, \tag{8.1}$$

还可以得到如图 4-8 所示的由曲线 $x = \psi(y)$、$x = \varphi(y)$（$\psi(y) \geqslant \varphi(y)$）及直线 $y = c$、$y = d$（$c < d$）所围成的图形面积为

$$A = \int_c^d [\psi(y) - \varphi(y)]\mathrm{d}y\,. \tag{8.2}$$

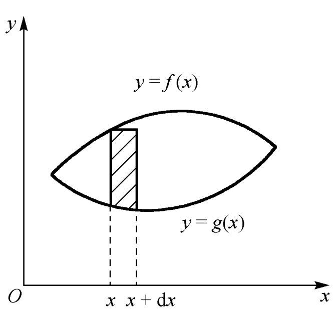


图 4-7

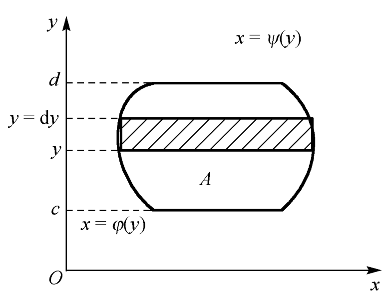


图 4-8

例 1 计算抛物线 $y = x^2 - 1$ 与 $y = 7 - x^2$ 所围成图形的面积.

解　由$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = 7 - x^2 \end{cases}$得交点$(-2,3)$，$(2,3)$，因此该图形在$x$轴上的投影区间为$[-2,2]$（如图 4-9 所示），于是由（8.1）式得

$$A = \int_{-2}^{2} [(7 - x^2) - (x^2 - 1)]\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)\mathrm{d}x = \left(8x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{64}{3}.$$

例 2　计算由抛物线$x = \dfrac{y^2}{2}$和直线$x = y + 4$所围成图形的面积.

解　由$\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2} \\ x = y + 4 \end{cases}$得交点$(2,-2),(8,4)$，该图形在$y$轴上的投影区间为$[-2,4]$（如图 4-10 所示），于是由（8.2）式得

$$A = \int_{-2}^{4} \left(y + 4 - \frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y = \frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6}\Bigg|_{-2}^{4} = 18.$$

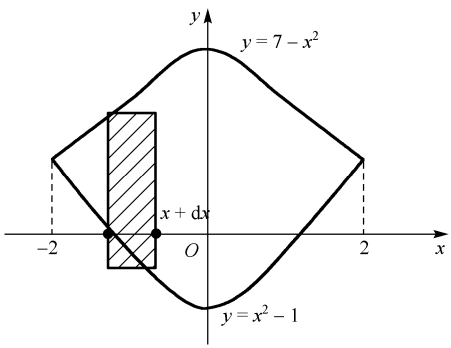


图 4-9

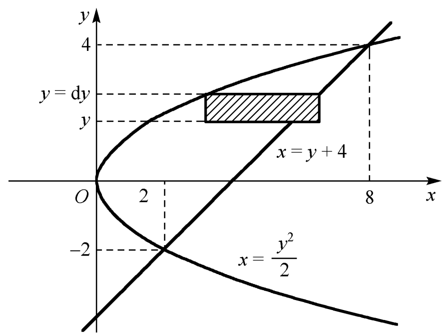


图 4-10

2. 极坐标系下图形面积的计算

若平面图形在极坐标系下，我们应如何计算它的面积呢?

设图 4-11 是由曲线$r = r(\theta)$和射线$\theta = \alpha$，$\theta = \beta$围成的，下面仍用微元法得到的定积分计算它的面积A.

取θ为积分变量，积分区间为$[\alpha,\beta]$，在$[\alpha,\beta]$上任取一个小区间$[\theta,\theta + \mathrm{d}\theta]$，利用扇形面积公式得到面积微元公式$\mathrm{d}A = \dfrac{1}{2}[r(\theta)]^2\mathrm{d}\theta$，由微元法得曲边扇形面积为

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[r(\theta)]^2\mathrm{d}\theta. \tag{8.3}$$

例 3　计算阿基米德螺线$r = a\theta$（$a > 0$）对应θ从 0 到2π所围图形的面积.

解　阿基米德螺线对应θ从 0 到2π所围图形如图 4-12 所示，由（8.3）式得

$$A = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2}a^2\theta^2\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{2}\frac{1}{3}\theta^3\Bigg|_{0}^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

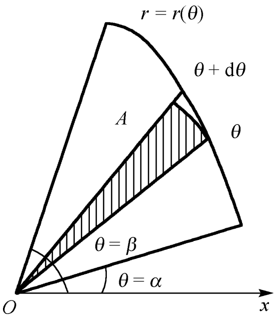


图 4-11

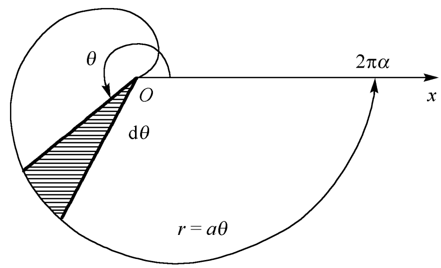


图 4-12

三、定积分在几何学中的其他应用

1. 旋转体的体积

由一个平面图形绕这个平面内一条直线旋转一周而成的立体称为旋转体，这直线叫作旋转轴. 下面求由连续曲线 $y=f(x)$（$a\leqslant x\leqslant b$）、直线 $x=a,x=b$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积（见图 4-13）.

取 x 为积分变量，积分区间为 $[a,b]$. 在 $[a,b]$ 上任取一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，小曲边梯形绕 x 轴旋转而成的薄片的体积近似地等于以 $f(x)$ 为底面半径、$\mathrm{d}x$ 为高的圆柱体的体积，即体积微元为 $\mathrm{d}V=\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$，于是，得到旋转体的体积为

$$V_x=\int_a^b\mathrm{d}V_x=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x\ .\tag{8.4}$$

类似可得，由连续曲线 $x=g(y)$（$c\leqslant y\leqslant d$）、直线 $y=c,y=d$ 及 y 轴所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积（见图 4-14）为

$$V_y=\pi\int_{\mathrm{c}}^{\mathrm{d}}\left[g(y)\right]^2\mathrm{d}y\tag{8.5}$$

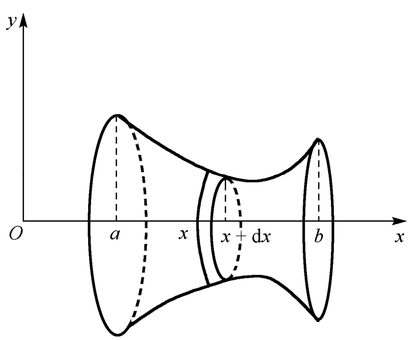


图 4-13

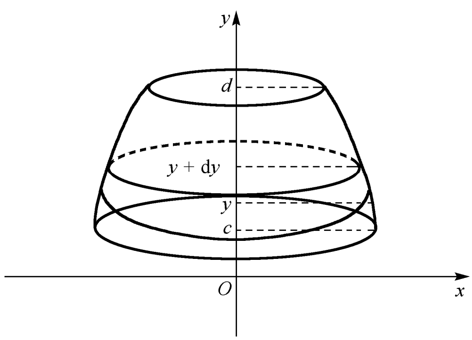


图 4-14

例 4　计算由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形绕 x 轴旋转而成的旋转体（称为旋转椭球体）的体积.

解　该旋转体可看作曲线 $y=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$（$-a\leqslant x\leqslant a$）绕 x 轴旋转而成（图 4-15），

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2\pi b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

例 5　由半径为 R 球体上截取一个高为 H（$H\leqslant R$）球缺，求该球缺的体积.

解　如图 4-16 所示取坐标，球缺的体积可以看作阴影部分图形绕 y 轴旋转的旋转体体积，于是

$$V=\pi\int_{R-H}^{R}x^2\mathrm{d}y=\pi\int_{R-H}^{R}(R^2-y^2)\mathrm{d}y=\pi\left(R^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{R-H}^{R}$$
$$=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right).$$

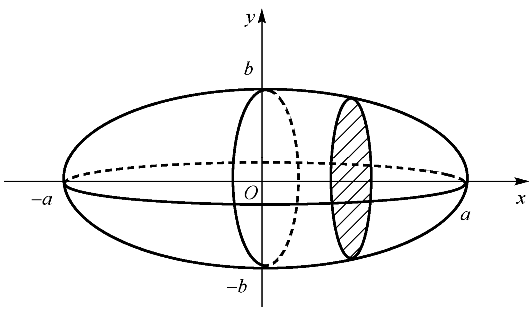


图 4-15

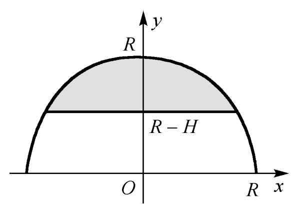


图 4-16

2. 平面曲线的弧长

如果曲线弧 l 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}\quad\alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

$t=\alpha,\beta$ 分别对应端点 A,B（见图 4-17），且设曲线是光滑的，即 $x(t)$， $y(t)$ 分别有连续的导函数 $x'(t),y'(t)$，且 $x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$，现在计算曲线弧的弧长.

取参数 t 为积分变量，它的取值区间为 $[\alpha,\beta]$，在 $[\alpha,\beta]$ 上任取一个小区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$，对应曲线上的点为 $M_t(x(t),y(t)),M_{t+\mathrm{d}t}(x(t+\mathrm{d}t),y(t+\mathrm{d}t))$，用弦 $\overline{M_tM_{t+\mathrm{d}t}}$ 的长度近似 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 所对应的 l 上的小弧段 $\overset{\frown}{M_tM_{t+\mathrm{d}t}}$ 的长度，从而得到弧长的微元. 弦长 $\overline{M_tM_{t+\mathrm{d}t}}$ 的公式为

$$\Delta s=\overline{M_tM_{t+\mathrm{d}t}}=\sqrt{[x(t+\mathrm{d}t)-x(t)]^2+[y(t+\mathrm{d}t)-y(t)]^2}$$
$$\approx\sqrt{[x'(t)\mathrm{d}t]^2+[y'(t)\mathrm{d}t]^2}=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t,$$

因此弧长的微元是 $\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$，所以所求弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t\qquad(8.6)$$

例 6　计算星形线 $x=a\cos^3\varphi, y=a\sin^3\varphi$（$a>0,0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$）的全长.

解　由星形线参数方程 $\begin{cases} x=a\cos^3\varphi \\ y=a\sin^3\varphi \end{cases}$，可知 $\begin{cases} x'=-3a\cos^2\varphi\sin\varphi \\ y'=3a\sin^2\varphi\cos\varphi \end{cases}$，如图 4-18 所示，根据图形的对称性 $s=4s_1$，再由（8.6）式可得

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2+y'^2}\,\mathrm{d}t=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi\mathrm{d}2\varphi$$

$$=3a(-\cos 2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=6a.$$

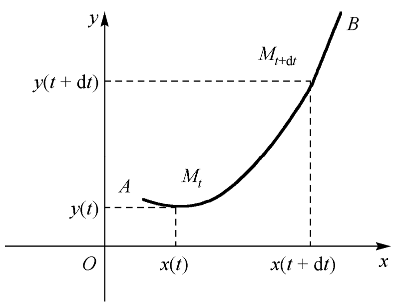


图 4-17

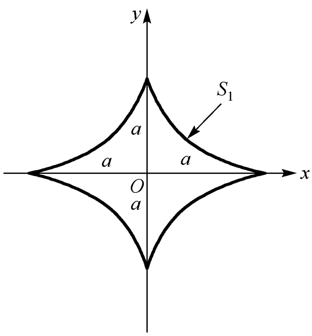


图 4-18

若曲线由方程 $y=f(x)$（$a\leqslant x\leqslant b$）给出，那么可把曲线方程写成如下参数方程的形式

$$\begin{cases} x=x, \\ y=f(x) \end{cases}\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

由（8.6）式得弧长公式为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.\tag{8.7}$$

例 7　计算曲线 $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 $3\leqslant x\leqslant 7$ 的一段弧的弧长（见图 4-19）.

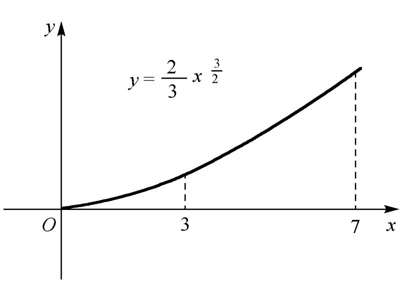


图 4-19

解　由于 $y'=x^{\frac{1}{2}}$，因此，

$$s=\int_3^7\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}\,\mathrm{d}x=\int_3^7\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_3^7=\frac{2}{3}(1+7)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(1+3)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}(16\sqrt{2}-8)=\frac{16}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

四、定积分在物理学中的应用

1. 变力沿直线所做的功

由物理学知道，如果一个物体在常力 F 作用下，沿力的方向做直线运动，位移为 s，那么力对物体所做的功为

$$W = F \cdot s.$$

但在日常生活中，物体在运动过程中所受的力经常是变化的，下面用定积分的微元法来研究变力做功问题.

例 8　随着我国航天事业的不断发展，载人宇宙飞船已遨游太空. 现在我们来研究，将质量为 m 的火箭从地面垂直发射到距地面高度为 h 的太空，克服地球引力所做的功的大小.

解　设地球的质量为 M，半径为 R，取地心为坐标原点，x 轴铅直向上根据万有引力定律，当火箭（相对于地心来说）位于 x 处时，地球对它的引力的大小为

$$F(x) = \frac{GMm}{x^2},$$

其中，G 为万有引力系数；x 的变化区间为 $[R, R+h]$，在 $[R, R+h]$ 上任取一个小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$，以 x 点处的力作为 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 上力的近似值，得功的微元为

$$\mathrm{d}W = \frac{GMm}{x^2}\mathrm{d}x,$$

因此，所求的功为

$$W = \int_R^{R+h} \frac{GMm}{x^2}\mathrm{d}x = GMm\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_R^{R+h} = \frac{GMmh}{R(R+h)}.$$

2. 水压力

由物理学知道，水平放置水中一薄板，其面积为 A，距水面的距离为 h，则该薄板的一侧所受的水压力（见图 4-20）为

$$F = p \cdot A = \rho g h A.$$

其中，ρ 为水的密度，g 是重力加速度.

若薄板竖直放置在水中，由于水不同深度压强不同，因此薄板一侧所受的压力（见图 4-21）就不能直接上述方法计算，下面举例说明利用定积分来解决此类问题.

例 9　一横放着的圆柱形水桶，桶内盛有半桶水，如图 4-22 所示. 设桶底半径为 R，水的密度为 ρ，计算桶的一个端面上所受的水压力.

解　设 x 为积分变量，取 $[0, R]$ 上的任一小区间为 $[x, x+\mathrm{d}x]$，考虑半圆片上相应于 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 的窄条所受的水压力（见图 4-23）. 这一窄条上各点处的压强可近似表示为 $p(x) \approx \rho g x$，窄条面积近似为 $\mathrm{d}A = 2\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

因此这一窄条所受的水压力的近似值，即压力微元为

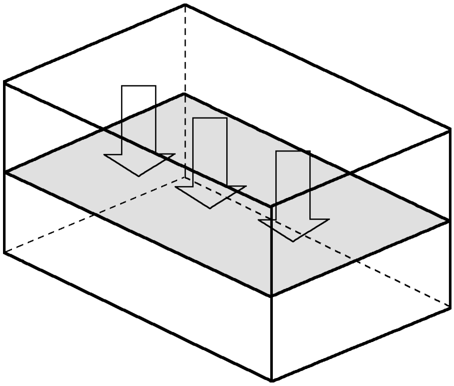


图 4-20

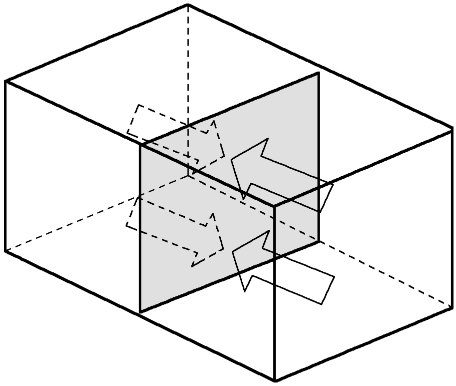


图 4-21

$$dF = p(x)dA = 2\rho g x\sqrt{R^2 - x^2}dx,$$

所求桶的一个端面上所受的水压力为

$$F = \int_0^R dF(x) = \int_0^R 2\rho g x\sqrt{R^2 - x^2}dx = -\rho g\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}d(R^2 - x^2)$$

$$= -\rho g\left[\frac{2}{3}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R = \frac{2\rho g}{3}R^3.$$

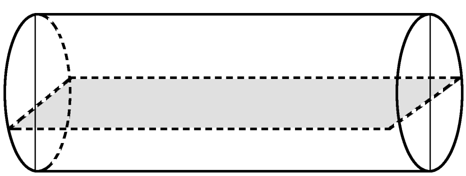


图 4-22

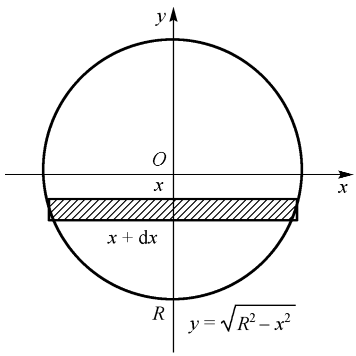


图 4-23

习题 4.8

1. 求由下列各平面图形的面积 A：

（1）由抛物线 $y = x^2$ 与直线 $y = x$ 及 $x = 2$ 围成；

（2）由抛物线 $y = 2 - x^2$， $y = \sqrt{x}$ 与直线 $y = 2$ 围成；

（3）计算由三叶玫瑰线 $\rho = a\sin 3\theta$ （$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$）所围图形的面积.

2. 求下列各平面图形绕指定坐标轴旋转一周所产生的旋转体的体积.

（1）由 $y = \sqrt{x}$， $y = 0$ 与 $x = 2$ 围成，绕 x 轴旋转；

（2）由 $y = x - x^2$，及 x 轴围成，绕 x 轴旋转；

（3）由 $y = 2 - x^2$， $y = x^2$ 及 y 轴围成，分别绕 x 轴、 y 轴旋转.

3. 计算下列平面曲线的弧长 s：

（1）$y=\frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x)$ 上，从 $x=1$ 到 $x=3$ 的一段；

（2）悬链线 $y=\mathrm{ch}x$ 上从 $x=-1$ 到 $x=1$ 的一段；

（3）计算旋轮线 $\begin{cases} x=R(\theta-\sin\theta) \\ y=R(1-\cos\theta) \end{cases}$，在 θ 从 0 到 2π 时，所对应的一拱的长度.

4. 一物体在力 $F(x)=x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的作用下，从 $x=1$ 处移动到 $x=4$ 处，求力 $F(x)$ 所做的功.

5. 由物理实验知道：弹簧在拉伸过程中，需要的力 F（单位：N）与伸长量 s（单位：cm）成正比，即 $F=ks$（k 为比例系数），如果把弹簧由原长拉伸 6 cm，计算力 F 所做的功.

6. 有一长为 3 m，宽为 2 m 的长方形薄板铅直沉入水中，顶部距水面 2 m，且短边与水面平行，求薄板所受的水压力.

第五章　常微分方程初步

在研究客观现象时，常会遇到这样一类问题，即其中某个变量和其他变量之间的函数依赖关系是未知的，但是这个未知的函数关系以及它的某些阶的导数（或微分）连同自变量都由一个已知的方程联系在一起，这样的方程称为微分方程. 如果未知函数是一元的，就叫做常微分方程；如果未知函数是多元的，则对应的微分方程称为偏微分方程.

本章主要讨论常微分方程的一些基本概念和几种常用的解法.

第一节　微分方程的基本概念

从 17 世纪后半叶开始，由于自然科学的需要和数学本身的发展，产生了微分方程. 下面通过两个简单的实例来说明微分方程的基本概念.

例 1　已知某曲线通过点 $(2,0)$，且该曲线上任意点 $M(x,y)$ 处的切线的斜率等于该点的横坐标 x 加 1，求此曲线的方程.

解　设所求曲线的方程为 $y=y(x)$，根据导数的几何定义，可得如下关系

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x+1, \tag{1.1}$$

此外，曲线方程 $y=y(x)$ 还应满足条件：当 $x=2$ 时，$y=0$，即

$$y\big|_{x=2}=0. \tag{1.2}$$

这样，问题就归结为求一个满足方程（1.1）和条件（1.2）的函数 $y=y(x)$.

由方程（1.1）得 $\mathrm{d}y=(x+1)\mathrm{d}x$，两边积分，得 $y=\int(x+1)\mathrm{d}x$，即

$$y=\frac{x^2}{2}+x+C,（C\text{ 为任意常数}） \tag{1.3}$$

按题意，方程（1.1）的解还应满足条件（1.2）. 为此，把条件 $x=2$，$y=0$ 代入方程（1.3)，得

$$0=\frac{2^2}{2}+2+C,$$

即 $C=-4$.

于是所求曲线的方程为

$$y=\frac{x^2}{2}+x-4. \tag{1.4}$$

例 2　设质量为 m 的物体在重力作用下由静止开始下落，若不计空气阻力，求物体的位移 s 和时间 t 的函数关系.

解　取物体的初始位置为坐标原点，铅垂线为轴 os，方向朝下，显然，位移 s 是时间 t 的函数.

由于物体只受重力作用，故物体所受的力 $F=mg$.

另一方面，根据牛顿第二定律，$F = ma$；由二阶导数的物理意义知，加速度 $a = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$，因此 $m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = mg$，即

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = g. \tag{1.5}$$

此外，还须满足条件

$$s\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0, \tag{1.6}$$

这样，问题就归结为要求一个满足式（1.5）和条件（1.6）式的函数 $s = s(t)$. 对（1.5）式两边积分，得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = gt + C_1,（C_1 \text{ 为任意常数}） \tag{1.7}$$

对（1.7）式两边积分，得

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2,（C_2 \text{ 为任意常数}） \tag{1.8}$$

把条件 $\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$ 代入（1.7）式，得 $C_1 = 0$；把条件 $s\big|_{t=0} = 0$ 代入（1.8）式，得 $C_2 = 0$，于是所求的函数关系为

$$s = \frac{1}{2}gt^2. \tag{1.9}$$

上述两例中的方程（1.1）和方程（1.5）都含有未知函数的导数，它们均是微分方程，下面给出一般概念.

定义 1.1　含有自变量、未知函数以及未知函数的导数（或微分）的方程称为微分方程.

凡未知函数为一元函数的微分方程称为常微分方程；未知函数为多元函数的微分方程称为偏微分方程. 本章只讨论常微分方程，常微分方程又简称为微分方程或方程. 在微分方程中，自变量和未知函数可以不出现，但未知函数的导数（或微分）必须出现.

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶.

例如方程（1.1）是一阶微分方程；方程（1.5）是二阶微分方程；方程 $x^3 y''' - 12(y')^4 = y^2$ 是三阶微分方程.

定义 1.2　如果把函数及其导数代入微分方程，能使方程成为恒等式，则称此函数为该微分方程的解. 或简单地说，满足微分方程的函数称为微分方程的解.

例如，函数（1.3）和函数（1.4）都是方程（1.1）的解，函数（1.8）和函数（1.9）都是方程（1.5）的解.

从上面两个例子可以看出，微分方程的解中有的含有任意常数，有的不含任意常数，如果微分方程的解中有独立的任意常数，这里所说的任意常数是相互独立的，就是说，它们不能合并而使得任意常数的个数减少，并且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解称为微分方程的通解.

例如函数（1.3）是方程的通解，函数（1.8）是方程（1.5）的通解.

由于通解中含有任意常数，故通解不能完全确定地反映某一客观事物的规律性，要完全确定地反映某一客观事物的规律性，必须确定这些任意常数. 为此，需根据问题的实际情况，提出能确定这些任意常数的条件，该条件通常称为初始条件.

如例 1 中的（1.2）式是方程（1.1）的初始条件；例 2 中的（1.6）式是方程（1.5）的初始条件.

根据初始条件确定了通解中的任意常数后所得到的解，称为微分方程的特解.

如函数（1.4）是方程的（1.1）的特解，这个特解满足初始条件（1.2）；函数（1.9）是方程（1.5）的特解，这个特解满足初始条件（1.6）式.

设微分方程中的未知函数为 $y=y(x)$，对于一阶微分方程，通常用来确定任意常数的初始条件只需一个，即

$$y\big|_{x=x_0}=y_0，（x_0，y_0\text{ 为给定值}）$$

对于二阶微分方程，通常用来确定任意常数的初始条件需两个，即

$$y\big|_{x=x_0}=y_0，\quad y'\big|_{x=x_0}=y_0'（x_0，y_0，y_0'\text{ 均为给定值}）$$

微分方程通解的图形是一族曲线，此曲线族称为积分曲线族，特解的图形是积分曲线族中的一条曲线，称为积分曲线.

例 3　验证函数 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$（$C_1,C_2$ 为任意常数），为二阶微分方程 $y''-y=0$ 的通解，并求满足初始条件 $y\big|_{x=0}=2，y'\big|_{x=0}=0$ 的特解.

解　$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$，$y'=C_1\mathrm{e}^x-C_2\mathrm{e}^{-x}$，$y''=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$，将 y'' 及 y 代入已知方程，得

$$(C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x})-(C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x})=0,$$

所以函数 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$ 是微分方程的解. 由于解中有两个任意常数，与微分方程的阶数相同，故 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$ 是微分方程的通解.

将初始条件代入 $y，y'$，得

$$\begin{cases}C_1+C_2=2\\C_1-C_2=0\end{cases},$$

解得 $C_1=1,C_2=1$，则满足条件 $y\big|_{x=0}=2,y'\big|_{x=0}=0$ 的特解为

$$y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}.$$

习题 5.1

1. 指出下列微分方程的阶数.

（1）$(y')^2-2yy'+x=0$；　　（2）$2xy\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}x=0$；

（3）$xy''-y'+3xy=0$；　　（4）$y^{(5)}+\sin(x+y)=y''+y'+2y$.

2. 验证下列已知函数是所给微分方程的解，并说明是通解还是特解（式中出现的 C 均为任意常数）.

（1）$y=\dfrac{C-x^2}{2x}$，$(x+y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$；

（2） $y=\cot x$， $\sin x\cos x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0$；

（3） $y=C_1\cos kx+C_2\sin kx$， $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+k^2y=0$；

（4） $y=5\cos 3x+\dfrac{x}{9}+\dfrac{1}{18}$， $y''+9y=x+\dfrac{1}{2}$.

3. 验证由方程 $y=\ln(xy)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 是微分方程

$$(xy-x)y'''+x(y')^2+yy'-2y'=0$$

的解.

4. 从下列各题的曲线族里，找出满足所给初始条件的曲线.

（1） $x^2-y^2=C$， $y\big|_{x=0}=5$；

（2） $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}$， $y\big|_{x=0}=0, y'\big|_{x=0}=1$

5. 已知一曲线通过点 $(1,0)$，且该曲线上任意点 $P(x,y)$ 处切线的斜率为 x^2，求该曲线的方程.

6. 设质点由原点开始 $(t=0)$ 沿直线运动，已知在 t 时刻的加速度为 t^2-1，在 $t=1$ 时，速度为 $\dfrac{1}{3}$，求位移 x 与时间 t 的函数关系.

7. 列车在平直的线路上以 20 m/s（相当于 72 km/h）的速度行驶，当制动时列车获得加速度–0.4 m/s^2，问：开始制动后多长时间列车才能停住？在这段时间里列车行驶了多少路程？

第二节　一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为 $F(x,y,y')=0$. 如果能从此方程中解出 y'，便得到方程 $y'=f(x,y)$，一般称此为已解出导数的一阶微分方程. 下面介绍两类常见的一阶微分方程.

一、可分离变量的微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y) \tag{2.1}$$

的方程，称为可分离变量的微分方程.

当 $g(y)\neq 0$ 时，方程（2.1）可以写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x \tag{2.2}$$

此时，方程的右端只含有变量 x，左端只含有变量 y，即方程中的变量已被分离.

对（2.2）式两端分别积分，得 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x$，设 $\dfrac{1}{g(y)}$ 和 $f(x)$ 的原函数分别为 $G(y)$ 和 $F(x)$，则

$$G(y)=F(x)+C .$$

由此二元方程所确定的隐函数 $y=f(x)$ 就是微分方程（2.2）的通解.

若存在 y_0，使 $g(y_0)=0$，直接代入方程（2.1）可知，$y=y_0$ 也是方程（2.1）的解，它可能不包含在通解中.

例 1　求微分方程 $y'=2xy$ 的通解.

解　将方程分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x,\quad (y\neq 0).$$

两端积分有 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 2x\mathrm{d}x$，可得

$$\ln|y|=x^2+C_1\ （C_1\text{为任意常数}），$$

即 $y=\pm\mathrm{e}^{x^2+C_1}$，令 $C=\pm\mathrm{e}^{C_1}$，于是方程的通解为 $y=C\mathrm{e}^{x^2}$.

今后，为了运算和表述方便，可把运算中的 $\ln|y|$ 写成 $\ln y$，最后结果中的 C 可为任意实数（易验证：当 $C=0$ 时，$y=0$ 也是已知方程的解）.

例 2　求微分方程 $\cos y\mathrm{d}x+(1+\mathrm{e}^{-x})\sin y\mathrm{d}y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$ 的特解.

解　将已知方程分离变量

$$\frac{\sin y}{\cos y}\mathrm{d}y=\frac{-\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}},$$

两端积分 $\int\frac{\sin y}{\cos y}\mathrm{d}y=\int\frac{-1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$，即 $\int\frac{\sin y}{\cos y}\mathrm{d}y=-\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$，得

$$\ln\cos y=\ln(1+\mathrm{e}^x)-\ln C.$$

（这里把任意常数写成 $\ln C$，$C>0$，是为了使下一步化简方便），即 $(1+\mathrm{e}^x)\sec y=C$，把 $y\Big|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$ 代入上式，求得 $C=2\sqrt{2}$. 因此，所求的特解为 $(1+\mathrm{e}^x)\sec y=2\sqrt{2}$.

例 3　一个带电物体，由于绝缘不完全而渐渐失掉自己的电荷. 设物体放电的速度与当时所带电荷成正比（比例系数为 $k>0$），开始时（$t=0$）的电荷等于 q_0，求电荷 q 与时间 t 的函数关系.

解　设电荷 q 与时间 t 的函数关系为 $q=q(t)$，则物体的放电速度为 $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$，由已知得

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=-kq, \tag{2.3}$$

初始条件 $q|_{t=0}=q_0$，方程显然是可分离变量的.

将方程（2.3）分离变量并两端积分，得 $\int\frac{\mathrm{d}q}{q}=-\int k\mathrm{d}t$，解之得 $\ln q=-kt+C_1$，即 $q=C\mathrm{e}^{-kt}$（$C=\mathrm{e}^{C_1}$），将初始条件 $q|_{t=0}=q_0$ 代入上式得 $C=q_0$. 于是得所求的函数关系（即方程的特解）为

$$q=q_0\mathrm{e}^{-kt}.$$

有些微分方程虽不属于可分离变量的类型，但通过适当的变量代换后，可以化为可分离变量的类型.

例 4　求微分方程 $x\mathrm{d}y - y\ln\frac{y}{x}\mathrm{d}x = 0$ 的通解.

解　此方程不属于可分离变量的类型，但其可改写为

$$y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x},$$

如果令 $\frac{y}{x} = u$，则 $y = xu$，由此得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入上式，得

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u\ln u,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u\ln u - u}{x},$$

这是一个可分离变量的方程，分离变量得 $\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u - 1)} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$，两边积分 $\int\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u - 1)} = \int\frac{\mathrm{d}x}{x}$，得 $\ln(\ln u - 1) = \ln x + \ln C$，

即 $\ln u - 1 = Cx$，所以 $u = \mathrm{e}^{Cx+1}$，代回原变量得 $\frac{y}{x} = \mathrm{e}^{Cx+1}$，于是原方程的通解为 $y = x\mathrm{e}^{Cx+1}$.

一般形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的方程称为齐次方程，这种方程只要通过变量代换 $u = \frac{y}{x}$，即可化为未知函数为 $u(x)$ 的可分离变量型微分方程，事实上，例 4 就是一个齐次方程.

二、一阶线性微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x) \tag{2.4}$$

的方程称为一阶线性微分方程，其中 $P(x),Q(x)$ 为已知函数，$Q(x)$ 称为自由项.

如果 $Q(x) = 0$，则方程（2.4）变为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = 0, \tag{2.5}$$

称为一阶齐次线性微分方程.

如果 $Q(x) \neq 0$，则方程（2.4）称为一阶非齐次线性微分方程，$Q(x)$ 称非齐次项.

1. 一阶齐次线性微分方程的解法

上述方程（2.5）为一阶齐次线性微分方程的形式，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = 0,$$

该方程分离变量后得 $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x$，两端积分得 $\ln y = -\int P(x)\,\mathrm{d}x + \ln C$.

所以方程的通解为

$$y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}. \tag{2.6}$$

（假定这里积分 $\int P(x)\,\mathrm{d}x$ 中不含任意常数.）

2. 一阶非齐次线性微分方程的解法

$Q(x) \neq 0$ 时，方程（2.4）为非齐次线性微分方程的形式，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x).$$

方程（2.4）与方程（2.5）的左端是相同的，所以方程（2.5）也称为方程（2.4）对应的齐次方程.

显然，方程（2.5）的解不会再是方程（2.4）的解，但是，由于这两个方程的左端相同，所以可猜想它们的解必有一定的联系. 由于 $C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 是方程（2.5）的通解，把它代入方程（2.4）显然不是恒等式，因此能使方程（2.4）的左端等于 $Q(x)$ 的解必定不是 $\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 与常数之乘积. 可以设想方程（2.4）的解是 $\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 乘一个 x 的函数 $C(x)$，即设方程（2.4）的解为

$$y = C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{2.7}$$

其中 $C(x)$ 是个待定的函数. 如果我们能把 $C(x)$ 确定，问题就解决了. 由（2.7）式求 y 的导数，得

$$y' = C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}[-P(x)] = C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - P(x)y,$$

将它代入非齐次线性方程（2.4），得 $C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x)$，即 $C'(x) = Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$，

积分后得

$$C(x) = \int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C, \tag{2.8}$$

将（2.8）式代入（2.7）式，即得一阶非齐次线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$ 的通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right], \tag{2.9}$$

其中 C 为任意常数（积分 $\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$ 中不再含任意常数）.

通过将对应齐次线性微分方程的通解中的任意常数 C 换为待定函数 $C(x)$，从而求出非齐次线性微分方程的通解的方法称为常数变易法.

下面我们来分析一下非齐次线性微分方程（2.4）的通解结构.

通解（2.9）式可改写成

$$y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

上式右端的第一项是对应的齐次线性微分方程（2.5）的通解，第二项是原非齐次线性微分方程（2.4）的一个特解［可以看作从通解公式（2.9）中令 $C = 0$ 而得到的那个特解］. 由此可知，一阶非齐次线性微分方程的通解的结构是：

一阶非齐次线性微分方程的通解=对应的齐次线性微分方程的通解+非齐次线性微分方程的一个特解.

在实际求解一阶非齐次线性微分方程时，通常是按照上述的常数变易法来求其解，当然也可以直接利用通解式（2.9）来求解，这就须首先搞清楚方程中的 $P(x)$ 、$Q(x)$ 的具体表达式，然后对号入座，将其代入通解式（2.9）中，计算出通解.

例 5　求方程 $y'+y\tan x=\sec x$ 的通解.

解　方法一　这是一阶非齐次线性微分方程，先求对应的齐次方程

$$y'+y\tan x=0$$

的通解，分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=-\tan x\mathrm{d}x$，两端积分得 $\ln y=\ln\cos x+\ln C$，即

$$y=C\cos x.$$

用常数变易法，把 C 换成 $C(x)$，即设 $y=C(x)\cos x$，那 $y'=C'(x)\cos x-C(x)\sin x$，代入原方程，得

$$C'(x)\cos x-C(x)\sin x+C(x)\cos x\tan x=\sec x,$$

即
$$C'(x)=\sec^2 x,$$

所以
$$C(x)=\int\sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C,$$

因此，原方程的通解为
$$y=\cos x(\tan x+C).$$

方法二　由于 $P(x)=\tan x,Q(x)=\sec x$，所以原方程的通解为

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left(\int\sec x\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=\mathrm{e}^{\ln\cos x}\left(\int\sec x\mathrm{e}^{-\ln\cos x}\mathrm{d}x+C\right)=\cos x\left(\int\sec^2 x\mathrm{d}x+C\right)=\cos x\left(\tan x+C\right).\end{aligned}$$

上述两种求解方法，方法一过程较烦琐，方法二需要记较长的公式. 介于二者之间的方法如方法三所示.

方法三　分析公式（2.9），可改写为

$$y\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C,$$

两边求导得

$$y'\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}+y\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}P(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

此式恰为方程（2.4）两边同乘以 $\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$ 所得，于是求解方程（2.4），可先将方程两边同乘以 $\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$，得 $[y\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}]'=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$，然后两边求不定积分即可求出通解 y.

事实上，在具体求解时，这种方法很方便，只需记住方程两边同乘以 $\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$ 即可.

例 6　求方程 $x^2\mathrm{d}y+(2xy-x+1)\mathrm{d}x=0$ 在 $y\big|_{x=1}=0$ 时的特解.

解　原方程可写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{x}y=\frac{x-1}{x^2},$$

这是一阶非齐次线性微分方程，利用上述方法三直接求解.

因为 $p(x)=\dfrac{2}{x}$，所以 $e^{\int \frac{2}{x}dx}=x^2$，所以方程两边同乘以 x^2，得 $(y\cdot x^2)'=x-1$，两边积分得 $yx^2=\dfrac{x^2}{2}-x+C$，故

$$y=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2}-x+C\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{C}{x^2}.$$

将初始条件 $y\big|_{x=1}=0$ 代入上面通解中，可得 $C=\dfrac{1}{2}$，故所求特解为

$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}.$$

例 7　求方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y}{6x-y^2}$ 的通解.

解　此方程不是关于未知函数 y 的线性微分方程，但方程可改写为

$$\frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x=-\frac{y}{2},$$

这样，把 x 看作未知函数，y 看作自变量，该方程便是关于未知函数 x 的一阶线性微分方程. 两边同乘以 $e^{\int\left(-\frac{3}{y}\right)dy}=y^{-3}$，即 $(xy^{-3})'=-\dfrac{1}{2y^2}$，两边积分得 $xy^{-3}=\dfrac{1}{2y}+C$.

因此，所求原方程的通解为

$$x=y^3\left(\frac{1}{2y}+C\right)=y^2\left(\frac{1}{2}+Cy\right).$$

有些微分方程，虽不是一阶线性微分方程，但通过适当的变量代换后，可以化为一阶线性微分方程.

形如 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n\,(n\neq 0,1)$ 的方程称为伯努利（Bernoulli）方程，整理可得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x),$$

或

$$\frac{1}{1-n}\frac{dy^{1-n}}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x),$$

代换 $z=y^{1-n}$，化为一阶线性微分方程

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x),$$

求出它的通解后，以 y^{1-n} 代 z，便得到伯努利方程的通解.

例 8　求方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{4}{x}y=x\sqrt{y}$ 的通解.

解　这是伯努利方程，其中 $n=\dfrac{1}{2}$. 令 $z=y^{1-\frac{1}{2}}=y^{\frac{1}{2}}$，则 $y=z^2$，则 $\dfrac{dy}{dx}=2z\dfrac{dz}{dx}$，代入所给

方程得 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x}z=\frac{x}{2}$，这是一阶线性微分方程. 利用通解公式（2.9）求得其通解为

$$z=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{2\ln x}\left(\int\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-2\ln x}\mathrm{d}x+C\right)$$
$$=x^2\left(\int\frac{x}{2}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+C\right)=x^2\left(\frac{1}{2}\ln|x|+C\right).$$

以 $z=y^{\frac{1}{2}}$ 代入上式，则所求方程通解为 $y=x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x|+C\right)^2$.

习题 5.2

1. 求下列可分离变量的微分方程的通解或在给定初始条件下的特解.

（1）$y'=10^{x+y}$；　（2）$xy'-y\ln y=0$；

（3）$xy'+y=y^2$；　（4）$\mathrm{e}^{-y}\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=1$；

（5）$y'\sin x=y\ln y$，$y|_{x=0}=\mathrm{e}$；　（6）$\sin y\mathrm{d}y=\cos x\mathrm{d}x$，$y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$.

2. 求下列微分方程的通解或在给定初始条件下的特解.

（1）$(x+1)y'-2y=(x+1)^4$；　（2）$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}y=y\mathrm{d}y$；

（3）$(x^2+y^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$，$y|_{x=1}=0$.

3. 假设某曲线上任意点的切线介于 x 轴与直线 $y=x$ 之间的线段都被切点所平分，且此曲线过点（0,1），求此曲线的方程.

4. 求下列微分方程的通解.

（1）$(x+1)y'-2y=(x+1)^4$；　（2）$y'+y\cos x=\mathrm{e}^{-\sin x}$；

（3）$y'=\frac{1}{2x-y^2}$；　（4）$y\ln y\mathrm{d}x+(x-\ln y)\mathrm{d}y=0$.

5. 求下列微分方程在所给初始条件下的特解.

（1）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=\frac{x+1}{x}$，$y|_{x=2}=3$；　（2）$y'-y\tan x=\sec x$，$y|_{z=0}=0$.

6. 已知曲线通过原点，并且它在点 (x,y) 处的切线斜率等于 $2x+y$，求此曲线的方程.

7. 求下列伯努利方程的通解

（1）$y'+2xy=2x^3y^3$；　（2）$y'+\frac{2}{x}y=3x^2y^{\frac{4}{3}}$.

第三节　几种可降阶的高阶微分方程

一、$y^{(n)}=f(x)$ 型

这类方程的特点是右端仅是自变量 x 的函数，因此只需对方程两边连续积分 n 次，即可得到其通解. 如果又知道方程的 n 个初始条件，则通解中的 n 个任意常数的值就可确定，从而得

到满足初始条件的特解.

例 1 求方程 $y'''=\sin x-\cos x$ 的通解.

解 在方程两边连续积分三次，得

$$y''=\int(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x=-\cos x-\sin x+C_1;$$

$$y'=\int(-\cos x-\sin x+C_1)\mathrm{d}x=-\sin x+\cos x+C_1x+C_2;$$

$$y=\int(-\sin x+\cos x+C_1x+C_2)\mathrm{d}x=\cos x+\sin x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3,$$

则 $y=\cos x+\sin x+\dfrac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$ 为所求的通解.

例 2 设有一单位质量的质点，在受到周期性回复力 $F=-Aw^2\sin wt$ （A、w 均为常数）的作用后，沿 ox 轴作直线运动，且 $t=0$ 时 $x=0$ ， $x'=Aw$ ，试求质点的运动方程.

解 由牛顿第二定律 $F=ma$ ，得微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-Aw^2\sin wt,$$

对方程两边连续积分两次，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\int(-Aw^2\sin wt)\mathrm{d}t=Aw\cos wt+C_1,$$

$$x=\int(Aw\cos wt+C_1)\mathrm{d}t=A\sin wt+C_1t+C_2,$$

由 $t=0$ 时 $x=0$ ，可得 $C_2=0$ ；由 $t=0$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Aw$ ，可得 $C_1=0$. 因此所求运动方程为 $x=A\sin wt$.

二、 $y''=f(x,y')$ 型

这类方程的特点是方程中不显含未知函数 y ，如何求解呢？

可以把 y' 作为新的未知函数，就可把原方程降价为一阶微分方程，从而易求出其通解.

设 $y'=p(x)$ ，则 $y''=p'$ ，于是方程 $y''=f(x,y')$ 即可变为 $p'=f(x,p)$ ，这是以 $p(x)$ 为未知函数的一阶微分方程. 若求得其通解为 $p=\varphi(x,C_1)$ ， 回代 $p=y'$ 又得到一个一阶微分方程 $y'=\varphi(x,C_1)$ ，两边积分，便得到原方程的通解为

$$y=\int\varphi(x,C_1)\,\mathrm{d}x+C_2.$$

例 3 求方程 $y''+y'\tan x=\sin 2x$ 的通解.

解 方程不显含 y ，设 $y'=p$ 则 $y''=p'$ ，于是原方程化为

$$p'+p\tan x=\sin 2x,$$

这是一阶非齐次线性微分方程，由求解公式得

$$p=\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left(\int\sin 2x\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1\right)=\mathrm{e}^{\int\ln\cos x}\left(\int\sin 2x\mathrm{e}^{-\ln\cos x}\mathrm{d}x+C_1\right)$$

$$=\cos x\left(\int 2\sin x\cos x\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x+C_1\right)=\cos x(-2\cos x+C_1),$$

回代 y'，得

$$y' = -2\cos^2 x + C_1 \cos x,$$

于是得原方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= \int (-2\cos^2 x + C_1 \cos x)\mathrm{d}x \\ &= -x - \frac{1}{2}\sin 2x + C_1 \sin x + C_2. \end{aligned}$$

三、 $y'' = f(y, y')$ 型

这类方程的特点是方程中不显含自变量 x，这时可进行变换 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)$，于是

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},$$

代入方程得

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p).$$

这是变量 y 与 p 的一阶微分方程，若求得其通解为 $p = f(y, C)$，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y, C)$，由分离变量法便可得原方程的通解.

例 4　求微分方程 $y'' = 2yy'$ 满足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = 2$ 的特解.

解　方程不显含 x，设 $y' = p(y)$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，原方程化为 $p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 2yp$，即 $p\left(\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - 2y\right) = 0$. 由 $p = 0$ 得到的解 $y = C$，不满足初始条件. 由 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 2y$ 得到 $p = y^2 + C_1$，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + C_1$，由初始条件 $y(0) = 1$，$y'(0) = 2$，得 $C_1 = 1$，于是有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + 1$，分离变量后再积分得 $\arctan y = x + C_2$，由 $y(0) = 1$，得 $C_2 = \dfrac{\pi}{4}$，故所求方程的特解为 $\arctan y = x + \dfrac{\pi}{4}$，即 $y = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

习题 5.3

1. 求下列微分方程的通解.

（1） $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$；　　（2） $y^{(4)} = -\dfrac{1}{x^2}$；

（3） $y'' - y' - x = 0$；　　（4） $y'' = 1 + (y')^2$.

2. 求下列微分方程在给定的初始条件下的特解.

（1） $x^2 y'' = \ln x$， $y|_{x=1} = 0$， $y'|_{x=1} = 1$.

（2） $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$， $y|_{x=0} = 0$， $y'|_{x=0} = 3$.

3. 试求 $y'' = x$ 经过点 $M(0,1)$ 且在此点与直线 $y = \dfrac{x}{2} + 1$ 相切的积分曲线.

第四节　二阶常系数线性微分方程

一、二阶线性微分方程解的结构

形如

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{4.1}$$

的方程，称为二阶线性微分方程，其中 $p(x),q(x)$ 及 $f(x)$ 均为 x 的已知函数，$f(x)$ 称为自由项. 当 $f(x)=0$ 时，方程变为

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \tag{4.2}$$

此方程称为二阶齐次线性微分方程；当 $f(x)\neq 0$ 时，原方程（4.1）称为二阶非齐次线性微分方程.

1. 二阶齐次线性微分方程解的结构

定理 4.1　如果 $y_1(x),y_2(x)$ 是方程（4.2）的两个解，则对于任意常数 C_1,C_2，$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 仍然是此方程的解.

证明　因为 $y_1(x),y_2(x)$ 都是方程（4.2）的解，故有

$$y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=0\text{，}\quad y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2=0.$$

因此

$$\begin{aligned}&(C_1y_1+C_2y_2)''+p(x)(C_1y_1+C_2y_2)'+q(x)(C_1y_1+C_2y_2)\\ &=C_1[y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1]+C_2[y_2''+p(x)y_2''+q(x)y_2]=0,\end{aligned}$$

即 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是方程（4.2）的解.

定理 4.1 给出的齐次线性微分方程的解的性质称为解的叠加性. 我们已经知道，二阶微分方程的通解应有两个独立的任意常数，那么，当已经找到齐次微分方程（4.2）的两个特解 y_1,y_2 时，$y=C_1y_1+C_2y_2$ 是否就是齐次微分方程（4.2）的通解呢？这需要看 $\dfrac{y_1}{y_2}$ 是不是常数. 如果 $\dfrac{y_1}{y_2}=k$（k 为常数），那么

$$y=C_1y_1+C_2y_2=C_1ky_2+C_2y_2=(C_1k+C_2)y_2=Cy_2,$$

实质上只含有一个任意常数 C，因此上式不是微分方程（4.2）的通解. 当 $\dfrac{y_1}{y_2}\neq k$ 时，解 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 中确实含有两个独立的任意常数，此解才是方程（4.2）的通解.

定义 4.1　如果两个函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 之比是一个常数，即 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}=k$（k 为常数），则称 $y_1(x)$与$y_2(x)$ 线性相关，否则称 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关.

定理 4.2　如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是二阶齐次线性微分方程（4.2）的两个线性无关的特解，则 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 就是该方程的通解，其中 C_1,C_2 是两个任意常数.

例 1　验证 $y_1=\mathrm{e}^x$ 与 $y_2=x\mathrm{e}^x$ 都是方程 $y''-2y'+y=0$ 的特解，并求方程满足 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=2$ 的特解.

解　因为 $y_1''-2y_1'+y_1=(\mathrm{e}^x)''-2(\mathrm{e}^x)'+\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x=0$，

$$y_2''-2y_2'+y_2=(x\mathrm{e}^x)''-2(x\mathrm{e}^x)'+x\mathrm{e}^x=(2+x)\mathrm{e}^x-2(1+x)\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x=0.$$

所以 $y_1=\mathrm{e}^x$，$y_2=x\mathrm{e}^x$ 都是方程的特解. 又 $\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{x\cdot\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}=x\neq$ 常数，故方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$，代入初始条件 $y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=2$，得 $C_1=1,C_2=1$，于是所求特解为 $y=(1+x)\mathrm{e}^x$.

2. 二阶非齐次线性微分方程解的结构

在第二节中，我们已经分析过一阶非齐次线性微分方程的通解结构，它是由两项相加而得，一项是对应齐次方程的通解，一项是非齐次方程的特解. 下面将证明，二阶非齐次线性微分方程的通解也有类似的结构.

定理 4.3　设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次线性方程（4.1）的特解，$\overline{y}(x)$ 是其对应的齐次方程（4.2）的通解，则 $y=\overline{y}(x)+y^*(x)$ 是二阶非齐次线性方程（4.1）的通解.

证明　因为 $y^*(x)$ 是二阶非齐次线性方程（4.1）的特解，$\overline{y}(x)$ 是其对应的齐次方程（4.2）的通解，所以有 ,$\overline{y}''+p(x)\overline{y'}+q(x)\overline{y}=0$

$$(y^*)''+p(x)(y^*)'+q(x)y=f(x)，\quad \overline{y}''+p(x)\overline{y}'+q(x)\overline{y}=0 .$$

将 $y=\overline{y}(x)+y^*(x)$ 代入方程（4.1）的左端，得

$$\begin{aligned}&(\overline{y}+y^*)''+p(x)(\overline{y}+y^*)'+q(x)(\overline{y}+y^*)\\=&[\overline{y}''+p(x)y'+q(x)\overline{y}]+[y^{*\prime\prime}+p(x)y^{*\prime}+q(x)y^*]\\=&f(x).\end{aligned}$$

因此，$y=\overline{y}(x)+y^*(x)$ 是二阶非齐次线性方程（4.1）的解.

又因为齐次方程（4.2）的通解 y 中含有任意独立的两个常数，所以 $y=\overline{y}(x)+y^*(x)$ 中也含有两个任意独立常数，因此，$y=\overline{y}(x)+y^*(x)$ 是二阶非齐次线性方程（4.1）的通解.

定理 4.3 说明，二阶非齐次线性微分方程（4.1）的通解等于其对应的齐次线性微分方程（4.2）的通解与自身的一个特解之和.

二、二阶常系数齐次线性微分方程

对于二阶线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$，如果系数函数 $p(x)$，$q(x)$ 均为常数，记为 $p(x)=p,q(x)=q$，则方程

$$y''+py'+qy=f(x) \tag{4.3}$$

称为二阶常系数线性微分方程.

若 $f(x)=0$，则方程

$$y''+py'+qy=0 \tag{4.4}$$

称为二阶常系数齐次线性微分方程；相应地，若 $f(x)\neq0$，则方程（4.3）称为二阶常系数非齐次线性微分方程. 下面介绍如何求解常系数线性齐次方程（4.4）.

由定理 4.1 可知，二阶齐次线性微分方程的通解是由它的两个线性无关的特解叠加而成的，故求解二阶常系数齐次线性微分方程（4.4）的关键是求出它的两个线性无关的特解，如

何求其特解呢？观察方程（4.4）的特点：未知函数 y 及其导函数 y' 和 y'' 各乘以常数后相加等于零，即 y、y' 和 y'' 之间只相差一个常数因子，根据求导数的经验，这样的非零函数只有指数函数 $y=\mathrm{e}^{rx}$，因此不妨采用试探法.

设 $y=\mathrm{e}^{rx}$（r 为待定常数）为方程（4.4）的特解，则

$$(\mathrm{e}^{rx})''+p(\mathrm{e}^{rx})'+q\mathrm{e}^{rx}=0,$$

$$(r^2+pr+q)\mathrm{e}^{rx}=0.$$

又 $y=\mathrm{e}^{rx}\neq 0$，于是

$$r^2+pr+q=0. \tag{4.5}$$

可见，如果选择 r 为代数方程（4.5）的一个根，则 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 就是齐次线性方程（4.4）的一个特解. 因此，求解齐次线性微分方程（4.4）可归结为求解代数方程（4.5）.

方程（4.5）称为齐次线性方程（4.4）的特征方程，它的根称为齐次线性方程（4.4）的特征根. 下面我们根据特征方程（4.5）的根的三种不同情况，分别给出齐次线性方程（4.4）的通解形式.

（1）若 $p^2-4q>0$，则特征方程（4.5）有两个不相等的实根 r_1,r_2. 此时 $y_1=\mathrm{e}^{r_1x}$，$y_2=\mathrm{e}^{r_2x}$ 都是齐次方程（4.4）的特解且线性无关，则 $y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$ 为齐次方程（4.4）的通解.

（2）若 $p^2-4q=0$，则特征方程（4.5）有两个相等的实根 $r_1=r_2$. 显然 $r=-\dfrac{p}{2}$，这时，只能得到齐次方程（4.4）的一个特解 $y_1=\mathrm{e}^{r_1x}$. 要得到通解，还需再求一个与 y_1 线性无关的特解 y_2，即需要求函数 y_2，使得 $y_2=u(x)\mathrm{e}^{r_1x}$（$u(x)\neq$ 常数）且 $y_2''+py_2'+qy_2=0$，其中 $u(x)$ 为待定函数. 容易验证 $u(x)=x$ 就是满足此要求的一个函数. 因此，$y_2=x\mathrm{e}^{r_1x}$ 是方程（4.4）的一个特解，且与 $y_1=\mathrm{e}^{r_1x}$ 线性无关，所以 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{r_1x}$ 为齐次方程（4.4）的通解.

（3）若 $p^2-4q<0$，则特征方程（4.5）有一对共轭复根 $r_1=\alpha+\beta\mathrm{i}$，$r_2=\alpha-\beta i$（$\alpha$，$\beta$ 均为实数，且 $\beta\neq 0$）. 这时 $y_1^*=\mathrm{e}^{(\alpha+\beta\mathrm{i})x}$ 和 $y_2^*=\mathrm{e}^{(\alpha-\beta\mathrm{i})x}$ 是齐次方程（4.4）的两个特解，但它们是复数解，不便于应用. 为得到实数解，利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，可得齐次方程的两个实数解 $y_1=\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$，$y_2=\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$. 容易看出 y_1 与 y_2 线性无关，因此 $y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ 为齐次方程（4.4）的通解.

综上讨论，得到求二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解步骤如下：

（1）写出特征方程 $r^2+pr+q=0$；

（2）求出特征根 r_1,r_2；

（3）根据 r_1,r_2 的三种不同情况，按下表直接写出齐次方程的通解.

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
实根 $r_1\neq r_2$	$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$
实根 $r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{r_1x}$
复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta\mathrm{i}$	$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

例 2 求微分方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2-2r-3=0$，得 $r_1=-1,r_2=3$. 故所求的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$.

例 3　求方程 $\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}-4\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}+4S=0$ 满足初始条件 $S|_{t=0}=0$ 和 $\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=2$ 的特解.

解　特征方程为 $r^2-4r+4=0$，得 $r_1=r_2=2$，故方程的通解为

$$S=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{2t},$$

将 $S|_{t=0}=0$ 代入上式，得 $C_1=0$，于是 $S=C_2t\mathrm{e}^{2t}$，对其求导，得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=C_2(1+2t)\mathrm{e}^{2t},$$

将 $\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=2$ 代入上式，得 $C_2=2$，故所求的特解为

$$S=2t\mathrm{e}^{2t}.$$

例 4　求微分方程 $y''-6y'+13y=0$ 的通解.

解　特征方程为 $r^2-6r+13=0$，得

$$r_{1,2}=3\pm 2\mathrm{i},$$

故所求通解为

$$y=\mathrm{e}^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

三、二阶常系数非齐次线性微分方程

对于二阶常系数非齐次微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$，由本节的定理 4.3 知道，其通解等于对应齐次方程的通解 $\overline{y}$ 与非齐次方程自身的一个特解 y^* 之和. 由于我们已经会求齐次方程的通解，于是求非齐次方程的通解的关键在于求其自身的一个特解 y^*. 下面介绍当非齐次方程中的自由项取某几种 $f(x)$ 常见形式时求 y^* 的方法，这种方法称为待定系数法.

1. $f(x)=p_m(x)$ 型

此时方程为

$$y''+py'+qy=p_m(x), \tag{4.6}$$

其中，$p_m(x)$ 是已知的 m 次多项式函数.

首先，我们探讨什么样的函数可能满足方程（4.6）. 因为方程右端是多项式，而多项式函数的导数还是多项式，且只有多项式函数的各阶导数的线性组合才会等于多项式，故推测 $y^*=Q(x)$（$Q(x)$ 是某个多项式）可能是方程（4.6）的特解. 然后，考虑怎样适当选择多项式 $Q(x)$，使 a_i（$i=0,1,2,\cdots,m$）满足方程（4.6）. 将 $y^*=Q(x)$ 代入方程（4.6），得

$$Q''(x)+pQ'(x)+qQ(x)=p_m(x). \tag{4.7}$$

（1）如果 $q\neq 0$，则式（4.7）端的多项式次数与 $Q(x)$ 的次数相同，因为它恒等于右端的 m 次多项式 $p_m(x)$，故 $Q(x)$ 应是一个 m 次多项式，因此可设特解为

$$y^*=Q_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m,\text{（其中 } a_0,a_1,\cdots,a_m \text{ 为待定系数）}$$

把此 $y^*=Q(x)$ 代入原方程（4.7），确定出 a_i（$i=0,1,2,\cdots,m$），从而得到方程（4.7）的一个特解.

（2）如果 $q=0$ 而 $p\neq 0$，则式（4.7）左端的多项式次数与 $Q'(x)$ 的次数相同，因它恒等于右端的 m 次多项式 $p_m(x)$，故 $Q(x)$ 应是一个 $m+1$ 次多项式，因此可设特解为

$$y^*=xQ_m(x).$$

并用与（1）同样的方法确定出 $Q_m(x)$ 的系数 a_i（$i=0,1,2,\cdots,m$）.

（3）如果 $q=0$ 且 $p=0$，此时方程（4.7）变为 $Q''(x)=p_m(x)$，即 $Q''(x)$ 是一个 m 次多项式，故 $Q(x)$ 应为 $m+2$ 次多项式，因此可设方程（4.6）特解为

$$y^*=x^2Q_m(x).$$

并用与（1）同样的方法确定出 $Q_m(x)$ 的系数.

由于 $q=0$ 且 $p=0$ 时，方程（4.7）即为 $y''(x)=p_m(x)$. 这种方程，可直接求得通解，事实上，只需连续积分两次，就可得到通解. 综上所述，有如下结论.

二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=p_m(x)$ 具有形如 $y^*=x^kQ_m(x)$ 的特解，其中 $Q_m(x)$ 是与 $p_m(x)$ 同次（m 次）的多项式，参数 k 按下列规定取值：

（1）当 $q\neq 0$ 时，$k=0$；

（2）当 $q=0$ 而 $p\neq 0$ 时，$k=1$；

（3）当 $q=0$ 且 $p=0$ 时，$k=2$.

例 5 求微分方程 $y''-y'-2y=x+\dfrac{1}{2}$ 的通解.

解 此方程为二阶常系数非齐次方程，先求其对应齐次方程的通解. 因为特征方程为

$$r^2-r-2=0,$$

所以特征根为

$$r_1=-1,r_2=2.$$

故对应齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

再求非齐次方程的一个特解. 因为自由项 $f(x)=x+\dfrac{1}{2}$ 为一次多项式且 $q=-2\neq 0$，所以可设特解

$$y^*=a_0x+a_1,$$

代入非齐次方程，得

$$(a_0x+a_1)''-(a_0x+a_1)'-2(a_0x+a_1)=x+\frac{1}{2},$$

即

$$-2a_0+(-a_0-2a_1)=x+\frac{1}{2},$$

比较两端同次幂的系数，得

$$\begin{cases}-2a_0=1\\-a_0-2a_1=\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

由此求得 $a_0=-\frac{1}{2},a_1=0$，于是非齐次方程的一个特解为

$$y^*=-\frac{1}{2}x,$$

所求通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}x.$$

2. $f(x)=p_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 型

此时方程为

$$y''+py'+qy=p_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}, \tag{4.8}$$

其中 λ 为实常数， $p_m(x)$ 是已知的 m 次多项式函数.

由于方程（4.8）右端是多项式函数与指数函数之积，而指数函数求导后形式不变，多项式函数的导数还是多项式函数. 故可假设方程（4.8）的特解为

$$y^*=R(x)\mathrm{e}^{\lambda x}，（R(x) 是任一多项式函数）$$

将其代入方程（4.8）可得

$$R''(x)+(2\lambda+p)R'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)R(x)=p_m(x). \tag{4.9}$$

比较（4.9）式与（4.7）式，类似可得如下结论.

二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=p_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 具有形如 $y^*=x^kR_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 的特解，其中 $R_m(x)$ 是与 $p_m(x)$ 同次（ m 次）的多项式，参数 k 按下面的规定取值：

（1）若 λ 不是特征方程的根， $k=0$，即特解形式为 $y^*=R_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$；

（2）若 λ 是特征方程的根， $k=1$，即特解形式为 $y^*=xR_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$；

（3）若 λ 是特征方程的根， $k=2$，即特解形式为 $y^*=x^2R_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$.

例 6　求微分方程 $y''-5y'+6y=x\mathrm{e}^{2x}$ 的特解.

解　自由项为

$$f(x)=x\mathrm{e}^{2x}$$

的非齐次方程，其对应的特征方程为

$$r^2-5r+6=0.$$

解得特征根为两个实根：　$r_1=2,r_2=3.$

即 $\lambda=2$ 是特征方程的单根，且 $p_m(x)$ 为一次多项式，故令特解形式为

$$y^*=x(ax+b)\mathrm{e}^{2x},$$

代入原方程并消去 e^{2x}，得

$$-2ax+2a-b=x,$$

比较系数得 $\begin{cases}-2a=1\\2a-b=0\end{cases}$，解得

$$a=-\frac{1}{2},b=-1.$$

所以要求的特解为

$$y^*=\left(-\frac{1}{2}x^2-x\right)e^{2x}.$$

3. $f(x)=e^{\lambda x}(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$型

此时方程为

$$y''+py'+qy=e^{\lambda x}(A\cos\omega x+B\sin\omega x), \tag{4.10}$$

其中 A、B、λ、ω 均为实常数.

非齐次方程（4.10）有什么形式的特解呢？由于方程的右端是指数函数 $e^{\lambda x}$ 与正弦、余弦函数的线性组合 $A\cos\omega x+B\sin\omega x$ 之积，而指数函数的导数仍是指数函数的形式，正弦、余弦函数的线性组合的导数仍是正弦、余弦函数的线性组合的形式，所以可以推测，方程（4.10）的特解仍是指数函数与正弦、余弦函数的线性组合的乘积，类似方程（4.8）特解的讨论，有如下结论：

二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=e^{\lambda x}(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$ 具有形如

$$y^*=x^k e^{\lambda x}(a\cos\omega x+b\sin\omega x)$$

的特解，其中 a、b 是待定常数，而 k 按 $\lambda+i\omega$ 不是特征方程的根，或是特征方程的单根而取 0 或 1.

例 7 求方程 $y''+y'-2y=e^x(\cos x-7\sin x)$ 的一个特解.

解 此方程属于自由项为

$$f(x)=e^{\lambda x}(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$$

的非齐次方程，且 $\lambda=1,\omega=1$. 由于特征方程 $r^2+r-2=0$ 的根为

$$r_1=1,r_2=-2,$$

则 $\lambda+i\omega=1+i$ 不是特征根，因此，设已知方程的特解为

$$y^*=e^x(a\cos x+b\sin x),$$

求导得

$$(y^*)'=e^x(a\cos x+b\sin x)+e^x(-a\sin x+b\cos x)=e^x[(a+b)\cos x+(b-a)\sin x],$$

$$\begin{aligned}(y^*)''&=e^x[(a+b)\cos x+(b-a)\sin x]+e^x[-(a+b)\sin x+(b-a)\cos x]\\&=e^x(2b\cos x-2a\sin x),\end{aligned}$$

把 y^*、$(y^*)'$、$(y^*)''$ 代入已知方程，并约去 e^x，得

$$(2b\cos x-2a\sin x)+[(a+b)\cos x+(b-a)\sin x]-2(a\cos x+b\sin x)=\cos x-7\sin x,$$

即

$$(2b+a+b-2a)\cos x+(-2a+b-a-2b)\sin x=\cos x-7\sin x,$$

比较两端的系数，得 $\begin{cases}-a+3b=1\\-3a-b=-7\end{cases}$，解得 $a=2,b=1$，故所求特解为

$$y^{*}=\mathrm{e}^{x}(2\cos x+\sin x).$$

在求二阶常系数非齐次线性方程的特解时，常会用到下面的定理.

定理 4.4 设 $y=y_1(x), y=y_2(x)$ 分别是方程

$$y''+py'+qy=f_1(x) \text{ 和 } y''+py'+qy=f_2(x)$$

的特解，则 $y=f_1(x)+f_2(x)$ 是方程 $y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x)$ 的特解.

证明略.

例 8 求方程 $y''-6y'+5y=5x^2-3\mathrm{e}^x$ 的一个特解.

解 因为已知方程的自由项 $f(x)=5x^2-3\mathrm{e}^x$ 不属于前面介绍的两种类型，所以不能直接设出方程的特解的形式，但由于组成 $f(x)$ 的两项 $5x^2$ 和 $-3\mathrm{e}^x$ 分别属于已介绍的两种类型，因此可根据定理 4.4，先分别求下面两个方程：

$$y''-6y'+5y=5x^2 \qquad ①$$

$$y''-6y'+5y=-3\mathrm{e}^x \qquad ②$$

的特解，这两个特解之和就是已知方程的一个特解. 因为特征方程为

$$r^2-6r+5=0,$$

故特征根为 $r_1=1, r_2=5$.

对于方程①，因自由项为 $5x^2$，且 $q=5\neq 0$，故设其特解为

$$y^{*}=a_0x^2+a_1x+a_2,$$

把它代入方程①，得

$$(a_0x^2+a_1x+a_2)''-6(a_0x^2+a_1x+a_2)'+5(a_0x^2+a_1x+a_2)=5x^2,$$

即

$$2a_0-6(2a_0x+a_1)+5(a_0x^2+a_1x+a_2)=5x^2,$$

比较方程两端 x 的同次系数，得

$$\begin{cases}5a_0=5\\ -12a_0+5a_1=0\\ 2a_0-6a_1+5a_2=0\end{cases},$$

从而求得 $a_0=1, a_1=\dfrac{12}{5}, a_2=\dfrac{62}{5}$，所以

$$y_1^{*}=x^2+\frac{12}{5}x+\frac{62}{5}.$$

对于方程②，因为自由项为 $-3\mathrm{e}^x$，$\lambda=1$ 特征方程的单根，所以设其特征解为 $y_2^{*}=a_0x\mathrm{e}^x$，把它代入方程②得

$$(a_0x\mathrm{e}^x)''-6(a_0x\mathrm{e}^x)'+5(a_0x\mathrm{e}^x)=-3\mathrm{e}^x,$$

即

$$a_0(2+x)\mathrm{e}^x-6a_0(1+x)\mathrm{e}^x+5(a_0x\mathrm{e}^x)=-3\mathrm{e}^x,$$

从而求得 $a_0=\dfrac{3}{4}$，所以 $y_2^*=\dfrac{3}{4}x\mathrm{e}^x$．因此，方程的一个特解为

$$y^*=y_1^*+y_2^*=x^2+\frac{12}{5}x+\frac{62}{5}+\frac{3}{4}x\mathrm{e}^x.$$

例 9　设 $f(x)=\sin x+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}(t)-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}(t)$，其中 $f(t)$ 为连续函数，求 $f(x)$．

解　由 $f(x)=\sin x+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}(t)-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}(t)$，则

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}(t),\ f''(x)=-\sin x-f(x).$$

从而得

$$f''(x)+f(x)=-\sin x.$$

不妨记 $y''+y=-\sin x$, 对应的特征方程为 $r^2+1=0$，$r_{1,2}=\pm\mathrm{i}$，则对应齐次方程通解为

$$\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

又依自由项形式，可令特解 $y^*=x(A\cos x+B\sin x)$，将其代入方程有

$$-2A\sin x+2B\cos x=-\sin x,$$

对比系数，得 $A=\dfrac{1}{2},B=0.$ 所以通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\cos x.$$

由于 $y(0)=0,y'(0)=1$，得 $C_1=0,C_2=\dfrac{1}{2}$，故

$$y=f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+x\cos x)\,.$$

习题 5.4

1. 求下列微分方程的通解.

（1） $y''-4y'=0$；　（2） $y''-9y=0$；　（3） $y''-2y'-y=0$；

（4） $4\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-20\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+25x=0$；　（5） $2y''+y'+\dfrac{1}{8}y=0$；　（6） $y''-2y'+3y=0$．

2. 求下列微分方程满足初始条件的特解.

（1） $y''-3y'-4y=0$，　$y|_{x=0}=0$，　$y'|_{x=0}=-5$．

（2） $4y''+4y'+y=0$，　$y|_{x=0}=2$，　$y'|_{x=0}=0$．

（3） $y''+y=0$，　$y|_{x=0}=y'|_{x=0}=1$．

3. 方程 $y''+9y=0$ 的一条积分曲线通过 $(\pi,1)$ 且在这一点和直线 $y+1=x-\pi$ 相切，求曲线方程.

4. 求下列非齐次微分方程的通解.

（1） $y''+y=x^2+1$；　（2） $2y''+5y'=5x^2-2x-1$；

（3） $y''-6y'+9y=2x^2-x+3$； （4） $2y''+y'-y=2e^x$；

（5） $y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$； （6） $y''-y=\sin^2 x$.

5. 求下列非齐次微分方程满足所给初始条件的特解.

（1） $y''-6y+8y=4$， $y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$；

（2） $y''+y=-\sin^2 x$， $y|_{x=\pi}=y'|_{x=\pi}=1$.

第五节　常微分方程应用举例

微分方程是描述自然界运动规律的数学工具之一，在几何和物理学等学科中有着广泛的应用. 本节集中讨论微分方程在实际问题中的应用，进而反映数学建模的基本思想：分析问题、变量假设、建立模型、求得结果.

例 1　有一旋转曲面形状的凹槽，假设从旋转轴上一点 O 出发的一切光线经此凹槽反射后都与旋转轴平行（汽车灯和探照灯内的凹槽都是这样的），求生成此曲面的曲线.

解　取旋转轴为 x 轴，光源点取作原点（如图 5-1 所示），取通过旋转轴的任意平面为 xOy 坐标面，这平面截此旋转曲面得曲线 C，此旋转曲面可看成由曲线 C 绕 x 轴旋转一周而生成的. 下面求曲线 C 的方程.

设从 O 点发出的某条光线经 C 上一点 $M(x,y)$，由反射镜反射成一条与 x 轴平行的直线 MS，图 5-1 中的 AT 和 MN 分别是曲线 C 在点 M 处的切线和法线. 设 AT 与 x 轴的倾角为 α，根据题意，有 $\angle SMT=\angle\alpha$. 由导数的几何意义知：

$$\tan\alpha=y'.$$

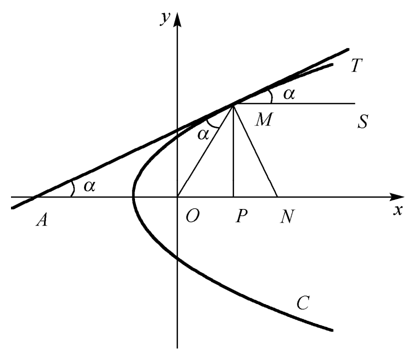


图 5-1

另一方面，根据光的反射定律，入射角 $\angle OMN$ 与反射角 $\angle NMS$ 相等，易得

$$\angle OMA=\angle SMT=\angle OAM=\alpha.$$

从而有 $OA=OM$，而 $PM=y$， $OP=x, OM=\sqrt{x^2+y^2}$.

在直角三角形 AMP 中，

$$\tan\alpha=\frac{PM}{AP}=\frac{PM}{OP+AO}=\frac{x}{y}.$$

于是得微分方程

$$y'=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

易看出，这是一个齐次方程，为方便求解，取 y 为自变量，x 为未知函数，把方程写为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}=\frac{x}{y}+\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}.$$

令 $u=\dfrac{x}{y}$，则有 $x=uy$， $\dfrac{dx}{dy}=u+y\dfrac{du}{dy}$，把它们代入上面方程，得

$$u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=u+\sqrt{u^2+1}.$$

即 $y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\sqrt{u^2+1}$，分离变量得 $\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}}=\frac{\mathrm{d}y}{y}$，两端积分得 $\ln(u+\sqrt{u^2+1})=\ln y+\ln C$，即 $u+\sqrt{u^2+1}=Cy$，亦即 $y^2=\frac{2Cyu+1}{C^2}$，将 $u=\frac{x}{y}$ 代回，得

$$y^2=\frac{2x}{C}+\frac{1}{C^2}.$$

这是以 Ox 为轴，焦点在原点的抛物线，以这样的抛物线绕 x 轴旋转一周，即得所需要的反射镜，故此抛物线即为所求.

例 2　一电路由电阻 R 及电容 C 串联而成，接在电动势为 E 的电源上（见图 5-2）. 开始时电容上没有电荷，电容两端的电压降为零. 把开关 K 闭合，电流 I 通过电阻 R 对电容 C 充电，求电容上电压 U_C 随时间 t 变化的规律 $U_C(t)$.

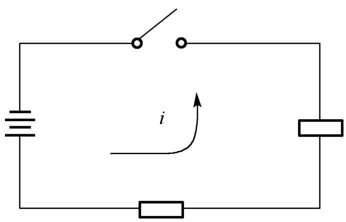


图 5-2

解　依题意，设充电电流为 $I=I(t)$，根据基尔霍夫定律，电路中的总电动势等于整个电路中的电压降，故在所给电路中，电阻 R 上的电压降 Ri 与电容 C 两端的电压降 U_C 之和等于电源电动势 E，即

$$Ri+U_C=E. \tag{5.1}$$

对电容充电时，电容上电荷 $q=CU_C$，而电流 $i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$，从而 $i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(CU_C)}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}$，把此式代入（5.1）式中，得到 U_C 所满足的微分方程

$$RC\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}+U_C=E, \tag{5.2}$$

由于充电开始时，电容 C 把两端的电压降为零，所以初始条件为 $U_C|_{t=0}=0$. 把方程（5.2）改写成

$$\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}+\frac{U_C}{RC}=\frac{E}{RC}.$$

这是一个非齐次线性微分方程，可利用通解公式先求出齐次方程的通解，由 $P(t)=\frac{1}{RC}$，$Q(t)=\frac{E}{RC}$，则方程的通解为（C_1 为常数）

$$\begin{aligned}U_C&=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{RC}\mathrm{d}(t)}\left(\int\frac{E}{RC}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{RC}\mathrm{d}x}\mathrm{d}t+c_1\right)=\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\left(E\int\mathrm{e}^{\frac{1}{RC}}\mathrm{d}\frac{t}{RC}+C_1\right)\\&=\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}(E\mathrm{e}^{\frac{t}{RC}}+C_1)=E+C_1\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}.\end{aligned}$$

把初始条件 $U_C|_{t=0}=0$ 代入上面通解中得，$C_1=-E$. 于是所求 U_c 的变化规律为 $U_C=E(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})$. 由此式知，电容在充电过程中，当 $t\to+\infty$ 时，$U_C\to E$，即为稳定的状态.

例 3　有一均匀、柔软、无伸张性的绳索，两端固定，仅受自身重力作用而下垂，试问该绳索在平衡状态时是怎样的曲线？

解　设绳索最低点 A 的张力大小为 H，绳索单位长度的重力为 ρ，以 s 表示自 A 到另一点 M 之间的弧长，取 y 轴过 A 点，x 轴与张力 H 的方向平行（见图 5-3）．为研究方便，不妨设 A 点的坐标为（0，$\dfrac{H}{\rho}$），设 M 点的坐标为 (x,y)．现在研究 A 点右边一部分绳索 AM 的情形，它在以下几个力的作用下平衡，这些力有：

（1）A 点处的张力 H（平行于 Ox 轴）；

（2）M 点处的张力 T（T 与弧段 AM 相切，设 α 为 T 的倾角）；

（3）弧段 AM 的重力 ρs．

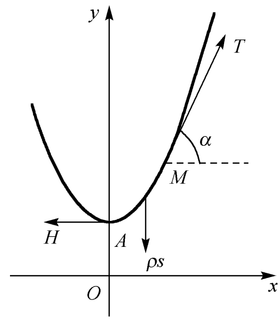


图 5-3

根据平衡条件，有 $T\sin\alpha=\rho s, T\cos\alpha=H$，从而有 $\tan\alpha=\dfrac{\rho s}{H}$．设 $a=\dfrac{H}{\rho}$，又因为 $\tan\alpha=y'$，于是上式即 $y'=\dfrac{s}{a}$，将其对 x 求导，得

$$y''=\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}.$$

弧长的微分公式是

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+y'^2},$$

于是得曲线 $y=y(x)$ 满足的方程

$$y''=\frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}.$$

初始条件为 $y|_{x=0}=\dfrac{H}{\rho}=a, y'|_{x=0}=0$．显然，方程属于 $y''=f(x,y')$ 型．设 $y'=p$，则 $y''=p'$，代入上述方程得

$$p'=\frac{1}{a}\sqrt{1+p^2},$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{a}\mathrm{d}x,$$

两端积分得

$$\ln(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{x}{a}+C_1,$$

将初始条件代入上式得，$C_1=0$，故 $\ln(p+\sqrt{1+\mathrm{p}^2})=\dfrac{x}{a}$，即 $p+\sqrt{1+p^2}=\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}$．

为了求出 p，上式两边同乘以 $p-\sqrt{1+p^2}$，整理得 $p-\sqrt{1+p^2}=-\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}$，从而 $p=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}})$，回代 y' 得 $y'=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}})$，再积分得 $y=\dfrac{a}{2}(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}})+C_2$，把初始条件代入上式得，$C_2=0$．因此，所求曲线方程为

$$y=\frac{a}{2}(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}).$$

习题 5.5

1. 某林区现有木材 100 000 m^3，如果每一瞬时木材数的变化率与当时的木材数成正比，假设 10 年内林区能有木材 200 000 m^3，试确定木材数 p 与时间 t 之间的关系.

2. 质量为 1 g 的质点受外力作用做直线运动，外力和时间成正比，和质点运动的速度成反比. 在时间 t=10 s 时速度等于 50 cm/s，外力为 4 g • cm/s^2，问从运动开始经过 1 min 后质点的速度是多少？

3. 一物体由 200℃冷却到 100℃用时 40 s，介质温度始终保持 10℃不变，物体的初始温度为 200℃，求物体的温度 θ 与时间 t 的函数关系，并求物体温度降到 20℃时所需要的时间.

4. 质量为 m 的物体，在空中静止开始下落，如果空气阻力为 $R=C^2v^2$（其中 C 为常数，v 为物体运动的速度），试求物体下落距离 s 与时间 t 的函数关系.

5. 一质量为 m 的潜水艇从水面由静止状态开始下降，所受阻力与下降速度成正比（比例系数为 k），求潜水艇下降速度 x 与时间 t 之间的函数关系.

第六章　向量代数与空间解析几何

本章主要利用向量的概念及其运算，讨论空间的平面、直线、曲面及空间曲线，这些是学习多元函数微积分的基础.

第一节　向量及其运算

一、向量的概念

我们把既有大小又有方向的量称为向量（也称为矢量）. 例如，力、位移、速度、加速度，等等.

通常用有向线段来表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，其方向表示向量的方向. 以 A 为起点、B 为终点的向量记为 $\overrightarrow{AB}$ （见图 6-1），其长度表示向量的 $\overrightarrow{AB}$ 大小，称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模，记作 $\left|\overrightarrow{AB}\right|$；点 A 到点 B 的方向为 $\overrightarrow{AB}$ 的方向. 印刷中常用一个黑体字母来表示向量，例如向量 $\boldsymbol{a}$.

任何向量都是由其模和方向确定的，因此可以将所研究的向量自由地平移到另外的位置，而认为该向量没有改变，因此通常也称之为自由向量.

模等于零的向量称为零向量，记作 $\mathbf{0}$ 或者 $\vec{0}$. 零向量的起点和终点重合，其方向可以是任意的.

模等于 1 的向量称为单位向量，记作 $\boldsymbol{e}$. 与 $\boldsymbol{a}$ 有相同方向的单位向量称作 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记作 $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{a}}$.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，方向相同，则称它们相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相反、模相等的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$.

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，将其中一个平移，使它们有共同的起点 O，记 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$（见图 6-2）. 称不超过 π 的 $\angle AOB$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定其夹角可以在 $[0,\pi]$ 上任意取值.

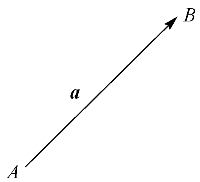


图 6-1

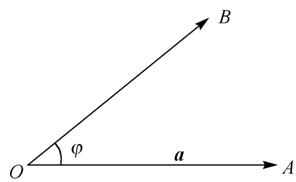


图 6-2

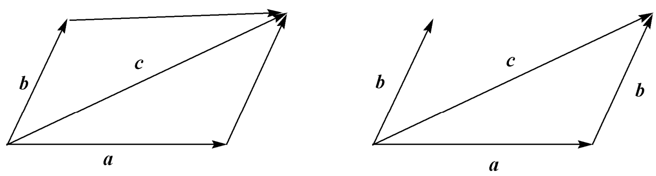
如果两个向量的夹角为零或 π，就称这两个向量平行. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 彼此平行的向量是共线的. 若有 n（$n\geqslant 3$）个向量，当通过平移使得它们有共同的起点，如果此时它们的终点与起点在同一平面内，则称这 n 个向量共面.

如果两个向量的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$，则称它们互相垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，规定零向量既与任意向量平行，又与任意向量垂直.

二、向量的运算

加法运算：设两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行，以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，从二者公共起点出发并以此点为起点的对角线，即为二者的和，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（见图 6-3（a））. 这种求向量和的方法称为平行四边形法则.

设有 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，也可以按照三角形法则来求和：作向量 $\boldsymbol{a}$，再以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为起点作向量 $\boldsymbol{b}$，连接 $\boldsymbol{a}$ 的起点与 $\boldsymbol{b}$ 的终点即得 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（见图 6-3（b））. 利用向量的三角形法则可以比较方便地求多个向量的和.



(a)　　(b)

图 6-3

零向量与任何向量 $\boldsymbol{a}$ 的和还是 $\boldsymbol{a}$.

向量的加法运算满足交换律与结合律：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\ ;$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\ .$$

减法运算：向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的负向量 $-\boldsymbol{b}$ 的和向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差向量，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$（见图 6-4）. 特别地，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=0$.

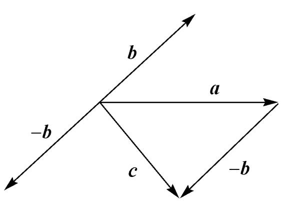


图 6-4

由于三角形的两边之和大于第三边，则有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

上面的两个不等式统称为三角不等式.

数乘运算：设有向量 $\boldsymbol{a}$ 和实数 λ，向量 $\boldsymbol{a}$ 和 λ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$.

（1）$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

（2）$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，其方向为：当 $\lambda>0$ 时，与向量 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，与向量 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，其方向是任意的.

特别地，$\lambda=-1$ 时，有 $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

数乘向量满足下列运算规律.

结合律：$(\lambda\mu)=\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$;

分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加减运算及数乘向量统称为向量的线性运算.

例 1　设有平行四边形 $ABCD$，M 是其对角线的交点，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$（见图 6-5）.

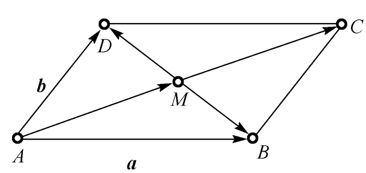


图 6-5

解　由于平行四边形的对角线互相平分，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$，于是

$$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b});\ \overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

由 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，故 $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$. 再由 $\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MB}$，所以 $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

按照数乘向量的规定，由于 $|\boldsymbol{a}|>0$，则 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{e}_a$ 的方向相同，即 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同. 又

$$\big||\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a\big|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{e}_a|=|\boldsymbol{a}|,$$

因此 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$，或者 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

因为向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，因此可用数乘向量来表示两个向量的平行关系.

定理 1.1　设非零向量 $\boldsymbol{a}$，向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充要条件是存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证　根据数乘向量运算的定义，充分性是显然的. 下面证必要性.

设 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当两向量同向时 λ 取正值，当两向量反向时 λ 取负值. 于是 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向，且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

因此，有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

再证 λ 的唯一性. 若不唯一，设存在 λ,μ 且 $\lambda\neq\mu$，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$ 同时成立. 两式相减得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=0\text{，即 }|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0.$$

于是 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，矛盾.

以上定理是建立数轴的依据. 给定一个点及一个单位向量，就确定了一个数轴. 于是给定点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 就确定了数轴 Ox（见图 6-6）. 对于轴上任一点 P，对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$，由于 $\overrightarrow{OP}/\!/\boldsymbol{i}$，按上述定理，一定存在唯一的实数 x，使得 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$. 并且 $\overrightarrow{OP}$ 与实数 x 一一对应，从而数轴上的点与实数 x 一一对应. 据此定义实数 x 为点 P 的坐标.

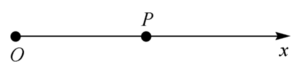


图 6-6

习题 6.1

1. 设向量 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$. 求 $3\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}$.
2. 在 $\triangle ABC$ 中，D,E 是 BC 边的三等分点，若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$. 求 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{EA}$.
3. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

第二节　向量的坐标与用坐标研究向量

一、空间直角坐标系

在空间任意取定一点 O，作三条两两垂直的数轴，使其原点与 O 重合，且具有相同的长

度单位. 这三条数轴分别称为 x（横）轴、y（纵）轴、z（竖）轴，统称为坐标轴. 它们的正方向符合右手法则，即如果右手四指由 x 轴的正向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后恰为 y 轴的正向,那么拇指所指的方向即为 z 的正向(见图 6-7). 这样就构成了一个空间直角坐标系 $Oxyz$，点 O 称为坐标原点.

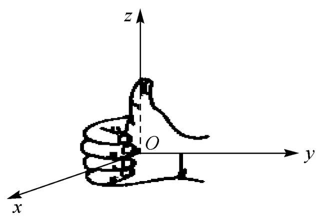


图 6-7

任意两坐标轴可以确定一个平面. 如 x 轴和 y 轴确定的坐标面叫 xOy 面，y 轴和 z 轴确定的坐标面叫 yOz 面，z 轴和 x 轴确定的坐标面叫 zOx 面，这样定出的三个平面统称为坐标面. 三个坐标面将空间分为 8 个部分，每一部分称为一个卦限. 其中将包含三个坐标轴正向的那个卦限称为第一卦限，第二、第三、第四卦限在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定. 第五至第八卦限依次在第一至第四卦限下方，这 8 个卦限分别用字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示（见图 6-8）.

设 M 是空间中的一点，过 M 作三个平面分别和 x 轴、y 轴、z 轴垂直相交，交点依次为 P、Q、R（见图 6-9）.

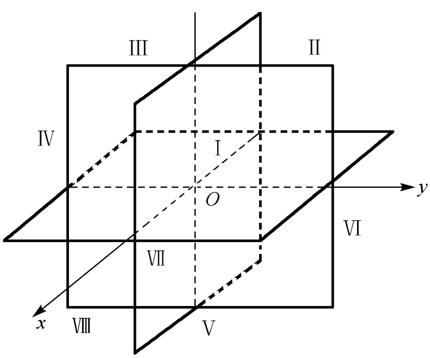


图 6-8

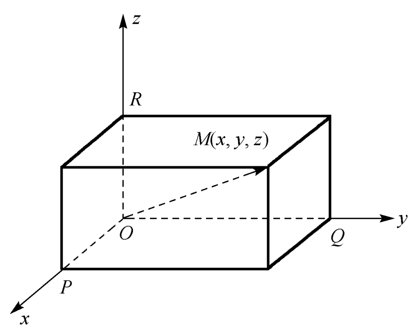


图 6-9

设 P、Q、R 三点在坐标轴上的坐标依次为 x、y、z，这样空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z)，数组 (x,y,z) 称为点 M 的直角坐标，记作 $M(x,y,z)$.

反过来，给定有序数组 (x,y,z)，我们依次在 x 轴、y 轴、z 轴上取与 x、y、z 相对应的点 P、Q、R，然后过 P、Q、R 分别作 x 轴、y 轴、z 轴的垂直平面，三平面的交点 M 就是以数组 (x,y,z) 为坐标的点.

这样空间的点就与三元有序数组 (x,y,z) 建立了一一对应关系.

坐标面和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征. 如 xOy 面上的点 $z=0$；yOz 面上的点 $x=0$；zOx 面上的点 $y=0$. x 轴上的点 $y=z=0$；y 轴上的点 $z=x=0$；z 轴上的点 $x=y=0$. 特别地，坐标原点 $x=y=z=0$，记为 $O(0,0,0)$.

二、利用坐标作向量的线性运算

1. 向量的坐标

以原点 O 为起点、点 P 为终点的非零向量 $\overline{OP}$ 称为点 P 的向径. 点的向径是起点固定在原点的特殊的向量. 并约定原点 O 的向径为零向量. 这样向径与其终点之间就建立了一一对应

关系，将向径终点的坐标定义为该向径的坐标. 因此，若有点 $P(x,y,z)$，那么向径 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标也为 (x,y,z)，记作 $\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$，或 $\overrightarrow{OP}(x,y,z)$.

设 $\boldsymbol{a}$ 为空间中的任意一非零向量. 由向量的自由性，可以将它平行移动使其以坐标原点 O 为起点，那么这时它就唯一对应一个向径 $\overrightarrow{OP}$. 称向径 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标 (x,y,z) 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记为 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，或 $\boldsymbol{a}(x,y,z)$.

分别称与 x 轴、y 轴、z 轴的正向具有相同方向的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为 x 轴、y 轴、z 轴的单位向量，其坐标分别为 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{j}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{k}=(0,0,1)$.

设 x 轴上有一点 A. 显然向量 $\overrightarrow{OA}//\boldsymbol{i}$. 必有唯一的实数 x，使得 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$. 同样，$y$ 轴上有一点 B $(0,y,0)$，有 $\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$；$z$ 轴上有一点 $C(0,0,z)$，有 $\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$.

设点 $P(x,y,z)$ 为空间中任意一点，则

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

称为向径 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标分解式. 对任意一非零向量 $\boldsymbol{a}$，称与它对应的向径 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标分解式为 $\boldsymbol{a}$ 的坐标分解式. 其中，$x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$ 和 $z\boldsymbol{k}$ 分别称为 $\boldsymbol{a}$ 沿 x 轴、y 轴、z 轴方向的分向量.

2. 向量的运算

设有向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ 及 $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则有

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}\ ,\quad \boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}\ .$$

利用向量的加法、减法的交换律与结合律，以及数乘向量的结合律与分配律，有

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k}\ ,$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}+\lambda z_1\boldsymbol{k}\ ,（\lambda\text{ 为实数}）$$

即
$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2),\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(x_1,y_1,z_1)\,.$$

由此看出，对向量进行加、减及数乘运算，只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算即可.

例 1　设给定两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$.

解　由于 $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$, 而

$$\overrightarrow{OM_2}=(x_2,y_2,z_2)\,,\ \overrightarrow{OM_1}=(x_1,y_1,z_1)\,,$$

故 $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

当向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，向量 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 相当于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，则 $(x_2,y_2,z_2)=\lambda(x_1,y_1,z_1)$. 即 $\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{z_2}{z_1}$.

3. 向量的模与方向余弦

设向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，如图 6-9 所示，有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}\,,$$

由勾股定理有 $|\boldsymbol{a}|=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{\left|OP\right|^2+\left|OQ\right|^2+\left|OR\right|^2}$.

由

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}，\ \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}，\ \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}.$$

有

$$|OP|=|x|,|OQ|=|y|,|OR|=|z|.$$

于是得向量模的坐标表示式为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

设有点 $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$，则点 A,B 之间的距离 $|AB|$ 就是 $\overrightarrow{AB}$ 的模. 由 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，有 $|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

向量 $\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$ 与 Ox,Oy,Oz 三坐标轴的夹角 α,β,γ 称为该向量的方向角，并规定 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi,0\leqslant\beta\leqslant\pi,0\leqslant\gamma\leqslant\pi$. $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的方向余弦. 如图 6-10 所示，由于 $MP\perp OP$，而 x 是有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值，故 $\cos\alpha=\dfrac{x}{|\overrightarrow{OM}|}$，类似地，$\cos\beta=\dfrac{y}{|\overrightarrow{OM}|}$, $\cos\gamma=\dfrac{z}{|\overrightarrow{OM}|}$. 从而

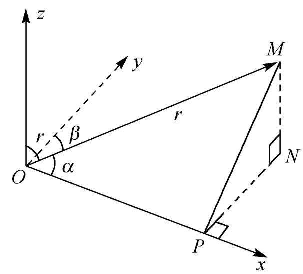


图 6-10

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{x}{|\overrightarrow{OM}|},\frac{y}{|\overrightarrow{OM}|},\frac{z}{|\overrightarrow{OM}|}\right)=\frac{1}{|\overrightarrow{OM}|}(x,y,z)=\frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|}=\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{OM}}.$$

且有 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

例 2　写出以点 $A(-2,1,3),B(1,2,-2)$ 为起点和终点的向量的坐标，并求 z 轴上与 A,B 两点等距离的点.

解　由向量的坐标计算方法，有

$$\overrightarrow{AB}=(1-(-2),2-1,(-2)-3)=(3,1,-5)$$

设 z 轴上与 A,B 两点等距离的点为 $M(0,0,z)$，则

$$|MA|=|MB|,$$

即 $\sqrt{(0+2)^2+(0-1)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(0-1)^2+(0-2)^2+(z+2)^2}$，两边去根号，解得 $z=\dfrac{1}{2}$，因此 z 轴上与 A,B 两点等距离的点为 $M\left(0,0,\dfrac{1}{2}\right)$.

例 3　已知两点 $P_1(2,2,\sqrt{2}),P_2(1,3,0)$，求向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解　$\overrightarrow{P_1P_2}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2})$；

$$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2；$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{1}{2},\cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}；$$

$$\alpha=\frac{2}{3}\pi,\beta=\frac{\pi}{3},\gamma=\frac{3}{4}\pi.$$

例 4　已知向量与 Oy 轴和 Oz 轴各成 $60°$，$120°$ 的角，求它与 Ox 轴所成的角.

解　已知 $\cos\beta=\cos60°=\dfrac{1}{2},\cos\gamma=\cos120°=-\dfrac{1}{2}$，

由于 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，所以

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}=\pm\sqrt{1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以向量与 ox 轴的夹角为 $45°$ 或 $135°$.

4. 向量的投影

设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定 u 轴（见图 6-11）. 任给向量 $\boldsymbol{r}$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，再过点 M 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 M'（点 M' 叫作点 M 在 u 轴上的投影)，则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的分向量. 设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$，则数 λ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影，记作 $\mathrm{Pr}\,j_u r$ 或 $(r)_u$.

按上述定义，向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x,a_y,a_z 就是 $\boldsymbol{a}$ 在三坐标轴上的投影，即

$$a_x=\mathrm{Pr}\,j_x\boldsymbol{a},\quad a_y=\mathrm{Pr}\,j_y\boldsymbol{a},\quad a_z=\mathrm{Pr}\,j_z\boldsymbol{a},$$

或记作

$$a_x=(a)_x,a_y=(a)_y,a_z=(a)_z.$$

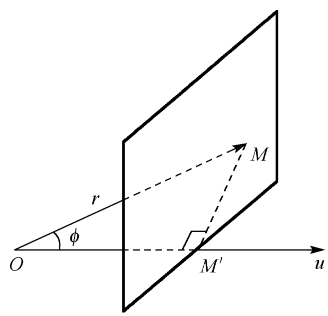


图 6-11

关于向量的投影，有下面的性质：

性质 1　$\mathrm{Pr}\,j_u\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi$（其中 φ 为 $\overrightarrow{AB}$ 与轴 u 的夹角）.

性质 2　相等的向量在同一轴上的投影相等.

性质 3　有限个向量的和在轴上的投影等于各个向量在该轴上的投影之和，即

$$\mathrm{Pr}\,j(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{Pr}\,j\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Pr}\,j\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathrm{Pr}\,j\boldsymbol{a}_n.$$

习题 6.2

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限？

$$A_1(2,1,-3)、A_2(-1,1,-3)、A_3(-2,-1,-3)、A_4(2,1,3).$$

2. 指出下列各点的位置：

$$A_1(1,0,-3)、A_2(0,1,0)、A_3(-2,0,0)、A_4(0,4,1).$$

3. 求点 (a,b,c) 关于（1）各坐标面；（2）各坐标轴；（3）坐标原点的对称点的坐标.

4. 设 $A(1,-2,-3)$、$B(2,-3,5)$ 为平行四边形相邻两个顶点，而 $M(1,1,2)$ 为对角线的交点，求其余两顶点的坐标.

5. 试确定 m,n 的值，使向量 $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 平行.

6. 证明以三点 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

7. 求点 $M(2,-3,3)$ 到各坐标轴的距离.

8. 已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$、$M_2(2,0,4)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

9. 设向量 r 的模是 4，它与 u 轴的夹角是 $60°$，求 r 在 u 轴的投影.

第三节　向量的乘积

一、两向量的数量积

设一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下从点 M_1 移动到 M_2．用 $\boldsymbol{s}$ 表示位移 $\overrightarrow{M_1M_2}$．由物理学可知，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为 $W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$（其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角）.

定义 3.1　两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积等于两向量的模和它们的夹角的余弦的乘积，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$（如图 6-12），即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

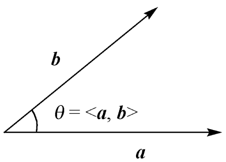


图 6-12

数量积也称为点积或内积.

据此定义，上述问题中力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功就是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积，即

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

当 $\boldsymbol{a}\neq 0$ 时，由投影定理可知 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},b})=\mathrm{Pr}\,j_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$ 即为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影，因此有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Pr}\,j_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b},$$

同理，当 $\boldsymbol{b}\neq 0$ 时有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Pr}\,j_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

即两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在该向量的方向上的投影的乘积.

由数量积的定义可推得：

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

这是因为夹角 $\theta=0$，故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2$.

（2）两非零向量垂直的充分必要条件为它们的数量积等于零.

事实上，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，则由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，得 $\cos\theta=0$，从而 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；反之，由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，即 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\cos\theta=0$，于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$.

向量的数量积符合下列运算律：

（1）交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

（2）分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

因为
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Pr}\,j_{c}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$
由投影定理
$$\mathrm{Pr}\,j_{c}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Pr}\,j_{c}\boldsymbol{a}+\mathrm{Pr}\,j_{c}\boldsymbol{b},$$
所以
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{c}|(\mathrm{Pr}\,j_{c}\boldsymbol{a}+\mathrm{Pr}\,j_{c}\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Pr}\,j_{c}\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|\mathrm{Pr}\,j_{c}\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

（3）结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$（$\lambda$ 为常数）.

当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，上式显然成立；当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，由投影的性质可得

$$(\lambda \boldsymbol{a})\cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\mathrm{Pr}\, j_b(\lambda \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{b}|\lambda \mathrm{Pr}\, j_b \boldsymbol{a} = \lambda |\boldsymbol{b}| \mathrm{Pr}\, j_b \boldsymbol{a} = \lambda(\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b}).$$

由上述结合律，利用交换律，易得

$$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \text{ 及 } (\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b}) = \lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

下面来推导数量积的坐标表示式.

设有两向量 $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$， $\boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$，则有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) \\
&= x_1\boldsymbol{i}(x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) + y_1\boldsymbol{j}(x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) + z_1\boldsymbol{k}(x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) \\
&= x_1x_2(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}) + x_1y_2(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}) + x_1z_2(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}) + y_1x_2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}) + y_1y_2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}) + y_1z_2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}) + \\
&\quad z_1x_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}) + z_1y_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}) + z_1z_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})
\end{aligned}$$

由于 i, j, k 互相垂直，所以

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}.$$

又由于 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的模均为 1，所以 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1$. 因而

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，所以当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 都不是零向量时，有

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

以数量积的坐标表示式及向量的模的坐标表示式代入上式，就得

$$\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

这就是两向量夹角余弦的坐标表示式.

例 1　已知 $A(1,2,3), B(2,1,-1), C(-1,-1,-1)$，求直线 AB 与 BC 的夹角.

解　因为 $\overrightarrow{AB} = (1,-1,-4), \overrightarrow{BC} = (-3,-2,0)$,

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}}) = \frac{1\times(-3) + (-1)\times(-2) + (-4)\times 0}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-4)^2}\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2}} = \frac{-1}{3\sqrt{26}},$$

所以直线 AB 与 BC 的夹角为 $\arccos\dfrac{-1}{3\sqrt{26}}$.

二、两向量的向量积

实际问题不仅需要研究向量的数量积，比如在研究物体转动问题时，不但要考虑这个物体所受的力，还要分析这些力所产生的力矩，这就需要研究两向量的向量积运算.

定义 3.2　设向量 $\boldsymbol{c}$ 由两个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 确定，且满足：

（1） $\boldsymbol{c}$ 的模： $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$；

（2） $\boldsymbol{c}$ 的方向：垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所确定的平面，并与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 遵守右手法则——右手的四指从 $\boldsymbol{a}$ 以不超过 π 的角转向 $\boldsymbol{b}$ 时，大拇指的指向就是 $\boldsymbol{c}$ 的方向（如图 6-13 所示）. 则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为两向

量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的向量积（也称为叉积），记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

从上述定义可以推得：

（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

（2）两非零向量平行的充分必要条件是它们的向量积为零.

事实上，若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，则由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，由于 $|\boldsymbol{a}|\neq\boldsymbol{0}$，$|\boldsymbol{b}|\neq\boldsymbol{0}$，故必有 $\sin\theta=0$，于是有 $\theta=0$ 或 π，即 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；反之，若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，那么 $\theta=0$ 或 π，于是 $\sin\theta=0$，从而 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$，即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

（3）向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积的模，等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积，或者是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的三角形面积的两倍.

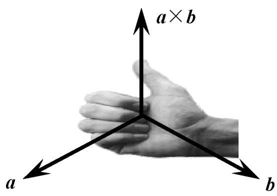


图 6-13

向量的向量积符合下列运算规律：

（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

这是因为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 的模相等，但按右手法则从 $\boldsymbol{b}$ 转向 $\boldsymbol{a}$ 定出的方向与从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 定出的方向相反.

（2）分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

（3）结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$（$\lambda$ 为常数）.

下面来推导向量积的坐标表示式：

设有向量 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=x_1\boldsymbol{i}\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})+y_1\boldsymbol{j}\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})+z_1\boldsymbol{k}\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=x_1x_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+x_1y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+x_1z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+y_1x_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+y_1y_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+y_1z_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+\\&\quad z_1x_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+z_1y_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+z_1z_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

由向量积的定义，有

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(y_1z_2-y_2z_1)\boldsymbol{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\boldsymbol{k}\\&=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}\end{aligned}$$

例 2　设 $\boldsymbol{a}=(1,2,4)$, $\boldsymbol{b}=(2,5,7)$, 计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&4\\2&5&7\end{vmatrix}=-6\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

例 3　计算 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

解
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})\\&=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

$$=-2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).$$

即以一已知平行四边形的两对角线为边所组成的平行四边形，其面积为原平行四边形面积的两倍.

例 4　已知三点 $A(1,2,3),B(2,-1,5),C(3,2,-5)$，求三角形 ABC 的面积.

解　根据向量积的定义，可知三角形 ABC 面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|.$$

由于 $\overrightarrow{AB}=(1,-3,2),\overrightarrow{AC}=(2,0,-8)$，因此

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 0 & -8\end{vmatrix}=24\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$$

于是 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{24^2+12^2+6^2}=3\sqrt{21}.$

三、向量的混合积

设已知三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$，如果先做两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积，再把所得的向量与第三个向量 $\boldsymbol{c}$ 做数量积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，这样得到的数量叫作三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的混合积，记作 $[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]$.

下面来推导混合积的坐标表示式.

设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$， $\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$， $\boldsymbol{c}=x_3\boldsymbol{i}+y_3\boldsymbol{j}+z_3\boldsymbol{k}$，

因为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

于是

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\\ &=x_3\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}+y_3\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\end{aligned}$$

或

$$[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

混合积的几何意义：

设向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 之间的夹角 θ 为锐角，现在来考察以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体. 由于

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta,$$

而 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 等于由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所确定的平行四边形的面积，数 $|\boldsymbol{c}|\cos\theta$ 是这个六面体的高，因此数 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta$ 等于以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 之间的夹角 θ 为钝角，显然有

$$-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta=\boldsymbol{V},$$

因此，此时的混合积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta$ 的绝对值等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

由向量混合积的几何意义，可以得到三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件：

向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，$\boldsymbol{c}=(x_3,y_3,z_3)$ 共面的充要条件为 $[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]=0$，即

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

例 5　已知空间不共面的四点：$A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2),C(x_3,y_3,z_3),D(x_4,y_4,z_4)$，四面体的体积 V.

解　由立体几何知道，四面体的体积 V 等于以向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 为棱的平行六面体的体积的六分之一. 所以

$$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}\quad\overrightarrow{AC}\quad\overrightarrow{AD}\right]\right|$$

又 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，$\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)$，$\overrightarrow{AD}=(x_4-x_1,y_4-y_1,z_4-z_1)$，所以

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{matrix}\right\|.$$

习题 6.3

1. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.
2. 求与 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 都垂直的所有非零向量.
3. 设向量 $\boldsymbol{a}=(-3k,9,2)$，$\boldsymbol{b}=(k,-3,9k)$，分别求满足下列条件的 k 值：（1）$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$；（2）$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.
4. 求以向量 $\boldsymbol{a}=(1,-3,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,-3,1)$ 为邻边的平行四边形的面积.
5. 设 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,4)$，问 λ,μ 满足什么条件时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直？
6. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.
7. 设向量 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}),(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

第四节　平　　面

一、点的轨迹

与在平面解析几何中将动点的轨迹看作平面曲线一样，建立在空间中的平面、曲面、直线、曲线等都可以看作点的轨迹. 如果曲面 S 与三元方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{4.1}$$

有下述关系：

（1）曲面 S 上任一点的坐标都满足方程（4.1）；

（2）不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程（4.1）.

那么方程（4.1）就叫作曲面 S 的方程，而曲面 S 就叫作方程（4.1）的图形.

下面通过例子来说明如何建立空间图形的方程.

例 1　设有两点 $P_1(1,2,2), P_2(2,0,3)$，求与这两点等距离的点的轨迹.

解　设 $M(x,y,z)$ 是到 P_1, P_2 等距离的任一点，那么

$$|MP_1| = |MP_2|,$$

由两点间距离公式得

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2+(z-3)^2}$$

整理得

$$x-y+z-2=0. \tag{4.2}$$

另一方面，如果点 $M(x,y,z)$ 到 P_1, P_2 的距离不相等，或者点 M 不在该图形上，则方程（4.2）不成立.

上述两方面的论述表明，到 P_1, P_2 等距离的点的坐标都满足方程（4.2）；而到 P_1, P_2 距离不相等的点的坐标都不满足方程（4.2），因此要求的图形的方程为（4.2）.

例 2　写出球心为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，半径为 R 的球面方程.

解　设 $M(x,y,z)$ 是球面上任一点，则有

$$|MM_0| = R,$$

即

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R,$$

整理得

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2. \tag{4.3}$$

这就是球面上的点的坐标所满足的方程；而不在球面上的点的坐标都不满足这个方程. 所以方程（4.3）就是以 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为球心、以 R 为半径的球面方程.

二、平面的方程

1. 平面的点法式方程

垂直于平面的非零向量，叫作该平面的法向量. 显然，平面上的任一向量均与该平面的法向量垂直.

我们知道，经过空间一点可以作一个平面，而且只能作一个平面与已知直线垂直. 所以当平面 π 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和它的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为已知时，平面 π 的位置就完全确定了.

如图 6-14，设 $M(x,y,z)$ 为平面 π 上的任一点，则向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 必与法向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直，即

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M} = 0. \tag{4.4}$$

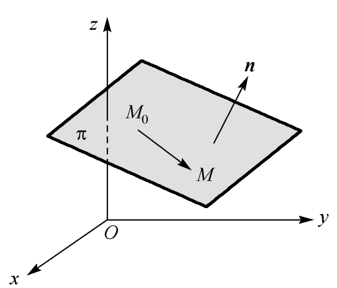


图 6-14

上式对 π 上任一点都成立，而且对于 π 外任一点都不成立，所以方程（4.4）就是用向量表示的过已知点 M_0 而法向量为 $\boldsymbol{n}$ 的平面 π 的方程.

因为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ ，$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ ，所以有

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\,. \tag{4.5}$$

这就是用坐标表示的过已知点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ，而法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 的平面 π 的方程，方程（4.5）叫作平面的点法式方程.

例 3　求过点 $(2,-3,0)$ 且与 $\boldsymbol{n}=(1,-2,3)$ 垂直的平面的方程.

解　取 $\boldsymbol{n}=(1,-2,3)$ 为所求平面的法向量，由平面的点法式方程，得所求平面方程为

$$(x-2)-2(y+3)+3(z-0)=0\,,$$

即

$$x-2y+3z-8=0\,.$$

例 4　求过三点 $P_1(1,1,1),P_2(-2,1,2),P_3(-3,3,1)$ 的平面方程.

解　因为 $\overrightarrow{P_1P_2}=(-3,0,1),\overrightarrow{P_1P_3}=(-4,2,0)$, 而所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 $\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3}$ 都垂直，故 $\boldsymbol{n}$ 与 $\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}$ 平行，而

$$\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -3 & 0 & 1\\ -4 & 2 & 0\end{vmatrix}=(-2,-4,-6)=-2(1,2,3)\,,$$

取 $\boldsymbol{n}=(1,2,3)$ ，由平面的点法式方程，所求平面的方程为

$$(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0\,,$$

即

$$x+2y+3z-6=0\,.$$

2. 平面的一般式方程

我们将（4.5）式展开，平面 π 的方程变为

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{4.6}$$

其中 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$ ，因为任一平面都可以由它上面的一点及其法向量确定，所以任一平面都可以用三元一次方程表示.

反过来，任一三元一次方程（4.6）都表示一个平面. 事实上，取满足方程（4.6）的任一组数 x_0,y_0,z_0 ，即有

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \tag{4.7}$$

把方程（4.6）、方程（4.7）相减，得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{4.8}$$

将方程（4.8）和方程（4.5）相比较，可知（4.8）是过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且以 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为法向量的平面方程. 方程（4.8）与方程（4.6）是同解的，故方程（4.6）的图形为一平面.

方程（4.6）称为平面的一般式方程，其中 (x_0,y_0,z_0) 为平面上的一个已知点，(A,B,C) 为平面的法向量.

对于一些特殊的三元一次方程，应该熟悉它们图形的特点. 如

$$Ax+By+Cz=0\quad(D=0)$$

表示一个通过原点的平面.

又如

$$Ax+By+D=0 \quad (C=0)$$

因为平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,0)$ 垂直于 z 轴，方程表示一个平行于 z 轴的平面.

再如

$$Cz+D=0 \quad (A=B=0)$$

因为平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,C)$ 同时垂直于 x 轴和 y 轴，方程表示平行于 xoy 面的平面.

例 5　求经过 x 轴和点 $(4,-3,-1)$ 的平面方程.

解　因为平面经过 x 轴，故设其方程为

$$By+Cz=0,$$

其中 B,C 为待定系数.

又因平面过点 $(4,-3,-1)$，于是有

$$-3B-C=0,$$

或

$$C=-3B.$$

以此代入所设方程并除以 B （$B\neq 0$），便得所求平面方程为

$$y-3z=0.$$

例 6　求过三点 $P_1(a,0,0),P_2(0,b,0),P_3(0,0,c)$ 的平面方程，其中 $abc\neq 0$.

解　设所求的平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，因为 $P_1(a,0,0),P_2(0,b,0),P_3(0,0,c)$ 三点都在平面上，所以

$$aA+D=0 \quad bB+D=0 \quad cC+D=0,$$

于是

$$A=-\frac{D}{a},\quad B=-\frac{D}{b},\quad C=-\frac{D}{c}.$$

所求的平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{4.9}$$

方程（4.9）称为平面的截距式方程，而 a,b,c 依次称为平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距.

三、两平面的夹角

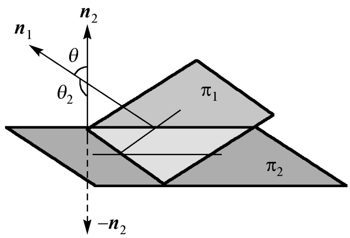


图 6-15

规定两平面的法向量的夹角（通常指锐角）为两平面的夹角.

设两平面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，由上述规定 π_1,π_2 的夹角 θ（见图 6-15）应该是 $(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})$ 和 $(\widehat{-\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})=\pi-(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})$ 两者中的锐角，因此 $\cos\theta=\left|\cos(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})\right|$.

由两向量夹角余弦的计算公式，有

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^{\ 2}+B_1^{\ 2}+C_1^{\ 2}}\sqrt{A_2^{\ 2}+B_2^{\ 2}+C_2^{\ 2}}}. \tag{4.10}$$

由此推得两平面平行的充要条件为

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2},$$

两平面垂直的充要条件为

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

例 7 求两平面 $2x-y+z-6=0,x+y+2z-5=0$ 的夹角.

解 由（4.10）式得

$$\cos\theta=\frac{|2\times1+(-1)\times1+1\times2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{1}{2}.$$

因此，所求夹角为 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

例 8 一平面经过 $M_1(1,1,1),M_2(0,1,-1)$ 且垂直于平面 $x+y+z=0$，求它的方程.

解 设所求平面方程为

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

因为 M_1,M_2 在所求平面上，故有

$$A+B+C+D=0, \tag{4.11}$$

$$B-C+D=0, \tag{4.12}$$

又因为所求平面垂直于平面 $x+y+z=0$，则

$$A+B+C=0. \tag{4.13}$$

解方程（4.11）、（4.12）和（4.13）组成的方程组，得

$$A=-2C,\quad B=C,\quad D=0.$$

代入所设方程并化简，得所求平面方程为

$$2x-y-z=0.$$

例 9 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点，求 P_0 到这个平面的距离.

解 过 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 作平面的一条法向量 $\boldsymbol{n}$，在平面内任取一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$（见图 6-16），则所求距离 d 为向量 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 在向量 $\boldsymbol{n}$ 上投影的绝对值. 即有

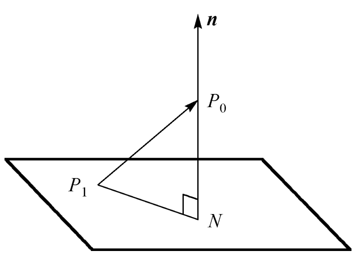


图 6-16

$$d=\left|(\overrightarrow{P_1P})_{\boldsymbol{n}}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{P_1P}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{|\overrightarrow{P_1P}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}.$$

取 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，由于 $\overrightarrow{P_1P_0}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)$，因此有

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P}\cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{4.14}$$

由于 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 在该平面内，因此有

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0,$$

即 $Ax_1+By_1+Cz_1=-D$ 代入（4.14）式整理得，

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

这就是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到该平面的距离．例如，点 $(2,1,1)$ 到平面 $x+y-z+1=0$ 的距离为

$$d=\frac{|1\times 2+1\times 1-1\times 1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

习题 6.4

1. 分别求满足下列各条件的平面方程.

（1）过点 $(4,-3,1)$ 且垂直于 y 轴；

（2）过点 $(1,0,-1)$ 且平行于平面 $2x-y+3z=1$；

（3）过 $(1,1,-1),(-2,-2,2),(1,-1,2)$ 三点；

（4）过点 $M(1,2,3)$ 且平行于两向量 $\boldsymbol{a}=(2,0,3)$， $\boldsymbol{b}=(1,-3,5)$；

（5）过 $(5,0,0),(0,-1,0)$ 且平行于 z 轴；

（6）平行于平面 $x-y+z=1$，且在 x 轴上截距为 3；

（7）平行于平面 $x+2y+2z=0$，且与该平面的距离为 2.

2. 指出下列各平面的特殊位置，并画出各平面.

（1） $x=0$；　　（2） $2y-1=0$；

（3） $x-3y+6=0$；　　（4） $x+3y-2z=0$；

（5） $x+2y=0$；　　（6） $x+2y-3z=6$.

3. 求平面 $2x-2y+z+6=0$ 与各坐标面夹角的余弦.

4. 求点 $(-2,4,3)$ 到平面 $2x-y+2z+3=0$ 的距离.

5. 求三平面 $x+3y+z=1,2x-y-z=0,-x+2y+2z=3$ 的交点.

6. 求两平面 $x-y+z=1,2x-2y+2z=3$ 之间的距离.

第五节　空 间 直 线

一、空间直线的一般方程

空间直线 l 可以看作是两个平面 π_1 和 π_2 的交线.

设平面 π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，和 π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 相交于直线 l（如图 6-17）. 因此，直线 l 上任一点的坐标必同时满足这两个平面的方程，即满足方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

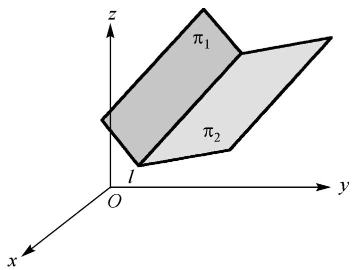


图 6-17

另外，如果一个点不在直线 l 上，那么它就不可能同时在平面 π_1 和 π_2 上，它的坐标也就不可能满足方程组（5.1）. 因此，直线 l 可以用方程组（5.1）来表示，方程组（5.1）叫作空间直线的一般方程，显然为保证两平面相交（不平行），方程组（5.1）中两方程的对应变量的系数不成比例.

因为通过空间一直线 l 的平面有无限多个，只要在这无限多个平面中任意选取两个，把它们的方程联立起来，所得的方程组就表示空间直线 l .

二、空间直线的点向式方程与参数方程

平行于直线的非零向量，叫作这条直线的方向向量，记作 $\boldsymbol{s}$. 显然，直线上任一向量都平行于该直线的方向向量.

直线的任一方向向量 $\boldsymbol{s}$ 的坐标 m,n,p 叫作这直线的一组方向数，而向量 $\boldsymbol{s}$ 的方向余弦叫作该直线的方向余弦.

设直线 l 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，其方向向量 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$（如图 6-18）. 我们知道，这样的直线存在并且是唯一的，下面来建立该直线的方程.

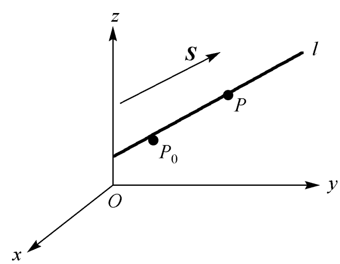


图 6-18

设点 $P(x,y,z)$ 是直线 l 上的任一点，则向量 $\overrightarrow{P_0P} \parallel \boldsymbol{s}$，由于 $\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$， $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，从而有

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.^{①} \tag{5.2}$$

反过来，如果点 $P(x,y,z)$ 不在直线 l 上，那么由于 $\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 不平行，这两向量的对应坐标就不成比例. 因此方程组（5.2）就是直线 l 的方程，叫作直线的点向式方程或对称式方程.

在直线的点向式方程中，如果设

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

那么，有

① 当 m,n,p 中有一个为零，例如 $m=0$，而 $n,p\neq 0$ 时，这个方程组应理解为

$$\begin{cases} x-x_0=0, \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}; \end{cases}$$

当 m,n,p 中有两个为零，例如 $m=n=0$，而 $p\neq 0$ 时，这个方程组应理解为

$$\begin{cases} x-x_0=0, \\ y-y_0=0. \end{cases}$$

的点向式方程或对称式方程.

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \tag{5.3}$$

方程组（5.3）称为直线的参数方程。

例 1　将直线

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x - y + 3z + 10 = 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

分别用点向式方程及参数方程表示.

解　在这直线上取一点(x_0, y_0, z_0)，比如，取$x_0 = 0$代入方程组（5.4），得

$$\begin{cases} y + z = -2, \\ y - 3z = 10. \end{cases}$$

解这个方程组，得$y_0 = 1, z_0 = -3$, 即$(0,1,-3)$是这直线上的一点.

该直线的方向向量$\boldsymbol{s}$与这两平面的法线向量$\boldsymbol{n}_1 = (1,1,1)$，$\boldsymbol{n}_2 = (2,-1,3)$都垂直，所以可取

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}.$$

于是，该直线的点向式方程为

$$\frac{x}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{-3}.$$

参数方程为

$$\begin{cases} x = 4t, \\ y = 1 - t, \\ z = -3 + 3t. \end{cases}$$

例 2　求直线$\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-4}{2}$与$2x + y + z - 6 = 0$平面的交点.

解　所给直线的参数方程为

$$x = 2 + t,\ y = 3 + t,\ z = 4 + 2t$$

代入平面方程中，得

$$2(2+t) + (3+t) + (4+2t) - 6 = 0$$

解上述方程，得$t = -1$. 把求得的t值代入直线的参数方程中，即得所求交点的坐标为

$$x = 1, y = 2, z = 2.$$

例 3　求与两平面$x - 4z = -7$和$2x - y - 5z = 3$的交线平行且过点$(2,-3,4)$的直线方程.

解　因为所求直线与两平面的交线平行，即直线的方向向量$\boldsymbol{s}$一定同时与两平面的法向量$\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$垂直，则

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -(4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}).$$

因此所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-4}{1}.$$

例 4　求过两点 $P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线方程.

解　取向量 $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ 为所求直线的方向向量，则所求直线方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{5.5}$$

方程（5.5）称为直线的两点式方程.

三、两直线的夹角

两直线的方向向量的夹角（通常指锐角）叫作两直线的夹角.

设有直线
$$l_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$
和
$$l_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

下面来计算这两条直线的夹角.

因为 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ 和 $\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$，依定义，$l_1$ 和 l_2 的夹角 φ 应是 $(\widehat{s_1,s_2})$ 和 $(\widehat{-s_1,s_2})=\pi-(\widehat{s_1,s_2})$ 两者中的锐角，因此 $\cos\varphi=\left|\cos(\widehat{s_1,s_2})\right|$，由两向量夹角的余弦公式，直线 l_1 和直线 l_2 的夹角 φ 可由

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \tag{5.6}$$

来确定两直线之间平行或垂直等价于其方向向量的垂直或平行，因此由两向量垂直、平行的充要条件有

两直线 l_1 、l_2 相互垂直相当于 $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$;

两直线 l_1 、l_2 互相平行或重合相当于 $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

例 5　求直线 l_1：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$ 和 l_2：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{-1}$ 的夹角.

解　直线 l_1 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=(1,-4,-1)$；直线 l_2 的方向向量 $\boldsymbol{s}_2=(2,-2,-1)$. 设直线 l_1 和 l_2 的夹角为 φ，那么由（5.6）式有

$$\cos\varphi=\frac{|1\times 2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

四、直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线的夹角 $\varphi\left(0\leqslant\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 称为直线与平面的夹角（如图 6-19 所示），当直线与平面垂直时，规定直线与平面的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$.

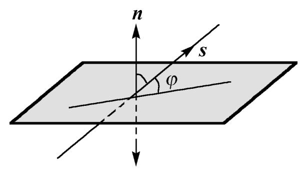


图 6-19

设直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m_1,n_1,p_1)$，平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，直线与平面的夹角为 $\varphi=\left|\dfrac{\pi}{2}-(\widehat{s,n})\right|$. 因此 $\sin\varphi=\left|\cos(\widehat{s,n})\right|$，于是

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{5.7}$$

显然直线与平面垂直相当于直线的方向向量与平面的法线向量平行；直线与平面平行相当于直线的方向向量与平面的法线向量垂直，所以

直线与平面垂直相当于 $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$；

直线与平面平行相当于 $Am+Bn+Cp=0$.

例 6　求直线 $x-2=y-3=\dfrac{z-4}{2}$ 与平面 $2x-y+z-6=0$ 的夹角.

解　直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=(1,1,2)$，平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(2,-1,1)$，由（5.7）式，得

$$\sin\varphi=\frac{|2\times1+(-1)\times1+1\times2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{1}{2},$$

所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

例 7　求过点 $(2,-1,4)$ 且与平面 $x-3y+4z-5=0$ 垂直的直线的方程.

解　因为该直线垂直于平面 $x-3y+4z-5=0$，所以可以取已知平面的法向量 $(1,-3,4)$ 作为所求直线的方向向量，又直线过点 $(2,-1,4)$，由此所求直线的方程为：

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-4}{4}.$$

例 8　求过点 $A(2,1,0)$ 且于直线 $l:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ 垂直相交的直线方程.

解　过点 A 且垂直于直线 l 的平面 π 的方程为

$$2(x-2)+(y-1)+z=0, \tag{5.8}$$

再求直线 l 与平面 π 的交点，因直线 l 的参数方程为

$$x=-1+2t,y=1+t,z=t \tag{5.9}$$

把（5.9）式代入（5.8）式中，求得 $t=1$，从而求得交点为 $(1,2,1)$，以点 $(2,1,0)$ 为起点，点 $(1,2,1)$ 为终点的向量 $(1-2,2-1,1-0)=(-1,1,1)$ 是所求直线的一个方向向量，故所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}.$$

五、平面束方程

设直线 l 的一般方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases} \tag{5.10}$$

其中，系数与 A_1、B_1、C_1 与 A_2,B_2,C_2 不成比例，因而这两个平面必然相交. 方程

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \tag{5.11}$$

中的系数不全为零，因此方程（5.11）表示通过直线 l 的平面，且对应于不同 λ 值，方程（5.11）表示通过直线 l 的不同的平面，反之，除平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 外，任何通过直线 l 的平面方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 都能写成形如方程（5.11）的形式. 称方程（5.11）为过直线 l 的平面束方程.

例 9　求直线 l：$\begin{cases} x+y-z-3=0, \\ x-y+z+4=0 \end{cases}$ 在平面 π： $x+y+z=2$ 上的投影直线的方程.

解　设过直线 l 的平面束方程为

$$x+y-z-3+\lambda(x-y+z+4)=0,$$

即

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-3+4\lambda)=0. \tag{5.12}$$

其中 λ 为待定常数，这平面与平面 π 的垂直条件是

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0,$$

解得 $\lambda=-1$. 代入方程（5.12），得到平面束中与 π 垂直的平面（称投影平面）的方程为

$$2y-2z-7=0,$$

所以投影直线的方程为

$$\begin{cases} 2y-2z-7=0 \\ x+y+z=2. \end{cases}$$

习题 6.5

1. 求过点 $(1,1,3)$ 且平行于直线 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{4}$ 的直线方程.
2. 求过两点 $(2,-1,1)$ 与 $(1,1,0)$ 的直线方程.
3. 用点向式方程及参数方程表示直线
$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4. \end{cases}$$
4. 求过点 $(2,-3,4)$ 且与平面 $3x-y+2z=4$ 垂直的直线方程.
5. 求过点 $(-1,2,1)$ 且平行于直线 $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x+2y-z=-1 \end{cases}$ 的直线方程.
6. 求两直线 $\begin{cases} 5x-3y-z=9 \\ 3x-2y+z=1 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} 2x+2y-z=-23 \\ 3x+8y+z=-8 \end{cases}$ 夹角的余弦.

7. 求直线$\begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$与平面$x-y-z+1=0$的夹角.

8. 试确定下列各题中直线和平面的位置关系：

（1）$\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-2}{3}$和$4x-7y-2z=5$；

（2）$\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$和$2x-2y-z=5$；

（3）$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+5}{-3}$和$x+y+z=4$.

9. 求直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+5}{1}$与平面$x-y+z=5$的交点.

10. 求直线$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ x+2y-z=-3 \end{cases}$在平面$2x+z=-4$上的投影直线方程.

第六节　曲　　面

一、旋转曲面

以一条平面曲线绕与其在同一平面内的定直线旋转一周所成的曲面叫作旋转曲面，这条曲线称为旋转曲面的母线，该定直线称为旋转曲面的轴.

设坐标面yOz上有一已知曲线C，其方程为$f(y,z)=0$，曲线C绕z轴旋转一周，就得到一个以z轴为轴的旋转曲面，如图 6-20 所示，下面建立该旋转曲面的方程.

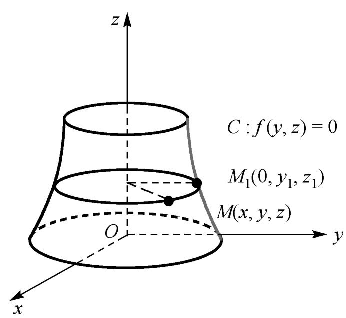


图 6-20

设$M_1(0,y_1,z_1)$为曲线C上的任一点，那么有

$$f(y_1,z_1)=0. \tag{6.1}$$

当曲线C绕z轴转到另一点$M(x,y,z)$，由于点M和点M_1到z轴的距离相等，即

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2}=\sqrt{(0-0)^2+(y_1-0)^2+(z-z)^2}$$

由此得

$$\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|.$$

当$z=z_1$，$y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$代入（6.1）式，就有

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0,$$

这就是所求旋转曲面的方程.

由此可知，在曲线 C 的方程 $f(y,z)=0$ 中，将 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ ，便得曲线 C 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的方程.

同理，曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

例 1　直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周所得的旋转曲面叫作圆锥面. 两直线的交点叫作圆锥面的顶点，两直线的夹角 $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 叫作圆锥面的半顶角. 试建立顶点在坐标原点 O，旋转轴为 z 轴，半顶角为 α 的圆锥面（见图 6-21）的方程.

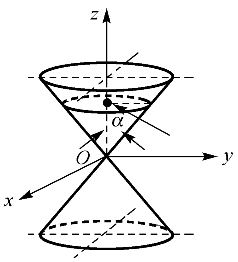


图 6-21

解　在 yOz 坐标面上，直线 L 方程为

$$z=y\cot\alpha$$

因为旋转轴为 z 轴，所以只要用 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 替换方程 $z=y\cot\alpha$ 中的 y，得

$$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha.$$

整理得

$$z^2=\frac{x^2+y^2}{a^2}\ (a=\tan\alpha),$$

这就是要求的圆锥面的方程.

例 2　将 zOx 坐标面上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$，分别绕 z 轴和 x 轴旋转一周，求生成的旋转曲面的方程.

解　绕 z 轴所成的旋转曲面成为旋转单叶双曲面（见图 6-22）其方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

绕 x 轴旋转所生成的旋转曲面成为旋转双叶双曲面（见图 6-23）其方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1.$$

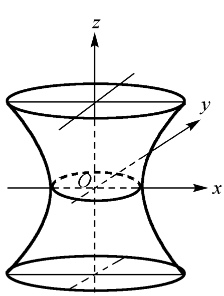


图 6-22

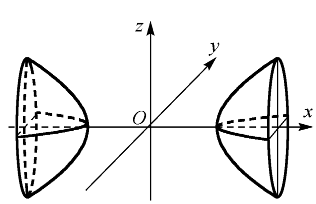


图 6-23

例 3　将 yOz 坐标面上的椭圆 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$，分别绕 y 轴和 z 轴旋转一周，求生成的旋转曲面的方程.

解　绕 z 轴所成的旋转曲面为旋转椭球面（见图 6-24），其方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

绕 y 轴旋转所生成的旋转曲面为旋转椭球面（见图 6-25），其方程为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2+z^2}{b^2}=1.$$

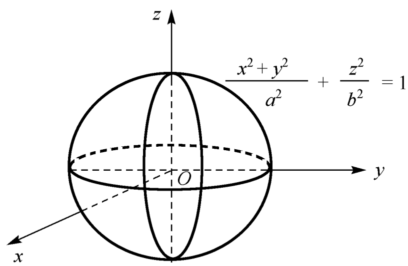


图 6-24

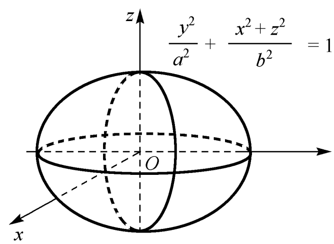


图 6-25

在旋转椭球面方程中，如果 $a=b=c$，那么 $x^2+y^2+z^2=a^2$，这就是球面方程.

二、柱面

沿定曲线 C 平行移动的直线 l 形成的轨迹叫作柱面. 其中定曲线 C 叫作柱面的准线，直线 l 叫作柱面的母线（见图 6-26）.

一般地，只含 x,y 而缺 z 的方程 $F(x,y)=0$，在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴，其准线是 xOy 面上的曲线 $C:F(x,y)=0$，如图 6-26 所示.

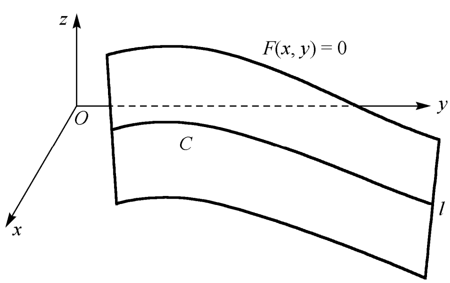


图 6-26

同理，$H(y,z)=0, G(z,x)=0$ 分别表示母线平行于 x 轴和 y 轴的柱面.

例如，方程 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 为双曲柱面（见图 6-27）的方程，其母线平行于 z 轴，准线为 xOy 面上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$；而 $y=\dfrac{x^2}{a^2}$ 是母线平行于 z 轴，准线为 xOy 面上的抛物线 $y=\dfrac{x^2}{a^2}$ 的抛物柱面的方程（见图 6-28）.

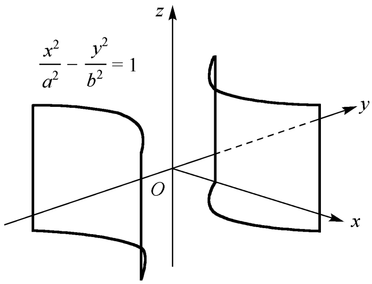


图 6-27

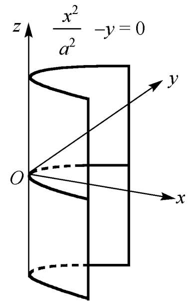


图 6-28

三、二次曲面

我们称三元二次方程所表示的曲面为二次曲面.

（1）椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$.

以平面 $z=t$ 截此曲面，当 $t=0$ 时得一点 $(0,0,0)$；当 $t\neq 0$ 时，得平面 $z=t$ 上的椭圆 $\frac{x^2}{(at)^2}+\frac{y^2}{(bt)^2}=1$.

当 t 变化时，上式表示一族长短轴比例不变的椭圆，当 $|t|$ 从大到小并变为 0 时，这族椭圆从大到小并缩为一点，综合上述讨论，可得椭圆锥面（1）的形状如图 6-29 所示.

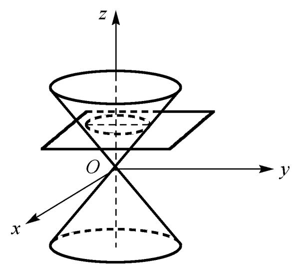


图 6-29

平面 $z=t$ 与曲面（1）的交线称为截痕，综合截痕的变化得到曲面（1）的形状，这样的方法称为截痕法.

（2）椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

椭球面方程可以看作是把 xOz 面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转，所得曲面称为旋转椭球面，其方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

再把 y^2 的系数 $\frac{1}{a^2}$ 换为 $\frac{1}{b^2}$ 而得到的（见图 6-30）.

（3）单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

它可以看作将旋转单叶双曲面 $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 中 y^2 的系数 $\frac{1}{a^2}$ 换为 $\frac{1}{b^2}$ 而得到（见图 6-31）.

（4）双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

它可以看作将旋转单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$ 中 y^2 的系数 $\frac{1}{c^2}$ 换为 $\frac{1}{b^2}$ 而得到的（见图 6-32）.

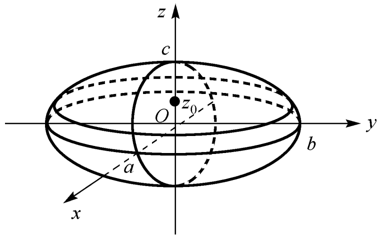


图 6-30

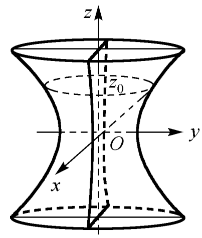


图 6-31

（5）椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$.

它可以看作由旋转抛物面的方程 $z=ax^2+ay^2$ 中的系数修改而得到的（见图 6-33）.

（6）双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$. 也称马鞍面（见图 6-34）.

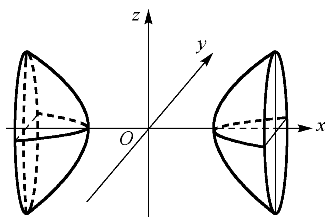


图 6-32

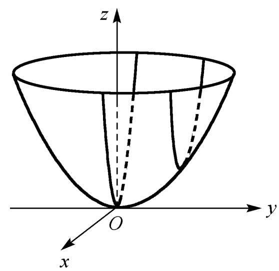


图 6-33

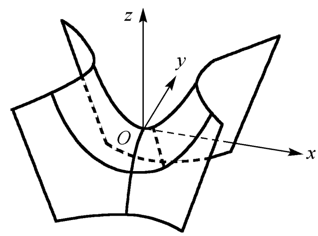


图 6-34

为更清楚地了解这些二次曲面的特点，可以采用截痕法，通过分析所得的截痕来了解相应的特点.

习题 6.6

1. 将 xOy 坐标面上的双曲线 $9x^2-4y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

2. 说明下列旋转曲面是怎样形成的.

（1）$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{5}=1$；　　（2）$x^2+\dfrac{y^2}{5}+z^2=1$；

（3）$\dfrac{x^2}{2}-y^2-z^2=1$；　　（4）$x^2+z^2=(y-a)^2$.

3. 指出下列方程所表示的曲面的名称，并作出它们的简单图形.

（1）$x^2+2y^2=1$；　　（2）$x^2-2y^2=1$；

（3）$x^2+2y^2=z$ ；　　（4）$x^2-2y^2=z$ ；

（5）$x^2+2y^2=z^2$；　　（6）$x^2-2y^2=z^2$；

（7）$x^2+2y^2+z^2=1$；　　（8）$x^2-2y^2-z^2=1$.

4. 指出下列方程在平面直角坐标系和空间直角坐标系中各表示什么图形.

（1） $x^2+y^2=2x$；　　（2） $x^2-2y^2=1$；

（3） $x+2y=3$；　　（4） $y^2=1-2x$；

（5） $x^2-9y^2=0$；　　（6） $4x^2+9y^2=4$.

第七节　空 间 曲 线

一、空间曲线的一般方程

设两曲面

$$S_1: F(x,y,z)=0, \quad S_2: G(x,y,z)=0$$

的交线为 C（见图 6-35）. 曲线 C 上任一点的坐标必同时满足这两曲面方程，从而满足方程组

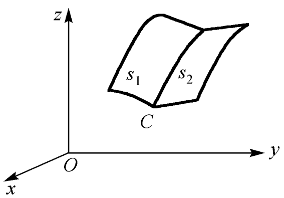


图 6-35

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{7.1}$$

反过来，不在曲线 C 上的点，不可能同时在这两曲面上，它的坐标就不满足方程组（7.1），所以曲线 C 可以用方程组（7.1）表示，方程组（7.1）称为空间曲线的一般方程.

例 1　方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ Ax+By=D \end{cases}$ 表示怎样的曲线？

解　$x^2+y^2=z^2$ 的图形是圆锥面，$Ax+By=D$ 是一个平行于 z 轴的平面. 所给的方程组为圆锥面与平面的交线（见图 6-36）的方程.

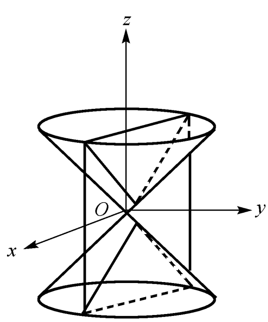


图 6-36

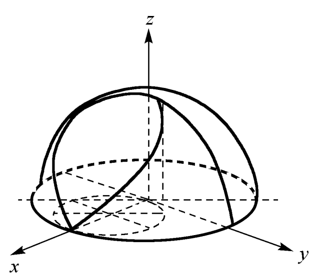


图 6-37

例 2　方程组 $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$ 表示什么样的曲线？

解　方程 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 为球心在坐标原点，半径为 2 的上半球面；$(x-1)^2+y^2=1$ 为母线平行于 z 轴、以 xOy 面上的圆周 $(x-1)^2+y^2=1$ 为准线的圆柱面. 该方程组表示二者的交线（见图 6-37），称为维维安尼曲线.

二、空间曲线的参数方程

一般地，空间曲线 C 上动点 P 的坐标 x,y,z 都是变量 t 的函数：

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \qquad a\leqslant t\leqslant b. \\ z=z(t), \end{cases} \tag{7.2}$$

则称方程组（7.2）为空间曲线 C 的参数方程.

例 3　如果空间一点 M 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升（其中 ω, v 都是常数），那么点 M 形成的图形叫作螺旋线. 求此螺旋线的方程.

解　取时间 t 为参数. 设 $t=0$ 时，动点位于 x 轴上一点 $A(a,0,0)$；经过时间 t，动点由 A 运动到 $M(x,y,z)$（见图 6-38）. 设 M 在 xOy 面上的投影为 M'，其坐标为 $(x,y,0)$. 由于动点在圆柱面上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，所以经过时间 t，$\angle AOM'=\omega t$. 从而

$$x=|OM'|\cos\angle AOM'=a\cos\omega t,$$

$$y=|OM'|\sin\angle AOM'=a\sin\omega t.$$

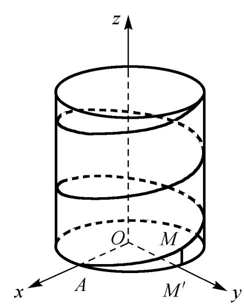


图 6-38

同时动点以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升，所以

$$z=|MM'|=vt.$$

因此螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\omega t, \\ y=a\sin\omega t, \\ z=vt. \end{cases}$$

它可以看作质点绕 z 轴旋转的匀速圆周运动和沿平行 z 轴正方向的匀速直线运动的合运动的轨迹.

三、空间曲线在坐标面上的投影

已知空间曲线 C 和平面 π，从 C 上各点向平面 π 作垂线，垂足所构成的曲线 C_1 称为曲线 C 在平面 π 上的投影曲线. 准线为曲线 C，而母线垂直于 π 的柱面称为曲线 C 关于平面 π 的投影柱面.

设空间曲线 C 的方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{7.3}$$

下面求曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线 C_1 的方程.

从方程组（7.3）中消去 z，得到一个不含变量 z 的方程

$$H(x,y)=0 \tag{7.4}$$

它表示母线平行于 z 轴的柱面. 由于曲线 C 上的点的坐标都满足方程组（7.3），因而也必然都满足方程（7.4），这说明柱面 $H(x,y)=0$ 过曲线 C，所以它就是空间曲线 C 到 xOy 面的投影柱面. 曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线 C_1 就是投影柱面 $H(x,y)=0$ 与 xOy 面的交线，因此曲线 C_1 的方程为

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

同理，从曲线 C 的方程（7.3）中消去 y（或 x）可以得到曲线 C 在 zOx（或 yOz）面上的投影曲线的方程

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}, \quad \text{或} \quad \begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

例 4 设半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 被圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所截取的部分曲面（见图 6-39）在 xOy 面上的投影.

解 半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 被圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所截取的部分曲面的边界曲线为

$$\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \\ z=\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

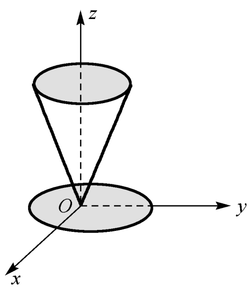


图 6-39

为求该曲线关于 xOy 面的投影，先求它关于 xOy 面的投影柱面. 由该方程组消去 z 得到该投影柱面的方程为

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{2}.$$

再将它与 xOy 面的方程联立，得

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{a^2}{2}, \\ z=0. \end{cases}$$

它就是空间曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线方程. 这条投影曲线是 xOy 面上的以原点为圆心、$\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 为半径的圆周，包围在它内部的平面区域就是要求的投影区域.

习题 6.7

1. 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y^2+z^2=1 \end{cases}$ 表示什么样的曲线？

2. 将曲线 $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=3 \\ z=1 \end{cases}$ 化为参数方程.

3. 指出下列方程所表示的曲线：

（1）$\begin{cases} x^2-y^2+2z^2=9 \\ z=2; \end{cases}$ （2）$\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x^2+y^2. \end{cases}$

4. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$ 在 xOy 面和 yOz 面上的投影曲线的方程.

5. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$（$0\leqslant z\leqslant 4$）在三个坐标平面上的投影.

第七章　多元函数微分学及其应用

多元函数是一元函数的推广. 它的一些基本概念及研究问题的思想方法与一元函数有许多类似之处，但是由于自变量个数的增加，它与一元函数又存在着某些区别，这些区别之处在学习中要加以注意. 在本章中对多元函数的讨论，将着重以二元函数为例进行. 在掌握了二元函数的有关理论与研究方法之后，可以把它推广到一般的多元函数中去.

第一节　多元函数的极限与连续

一元函数的定义域是实数轴上的点集，而二元函数的定义域是坐标平面上的点集. 因此，在讨论二元函数之前，有必要先了解有关平面点集的一些基本概念.

一、平面点集与 n 维空间

1. 平面点集

由平面解析几何知道，当在平面上确定了一个直角坐标系后，平面上的点 P 与二元有序实数组 (x,y) 之间就建立了一一对应. 于是，我们常把二元有序实数组 (x,y) 与平面上的点 P 看作是等同的. 这种建立了坐标系的平面称为坐标平面.

二元有序实数组 (x,y) 的全体，即 $R^2=\{(x,y)|x,y\in R\}$ 就表示坐标平面.

坐标平面上满足某种条件 C 的点的集合，称为平面点集，记作

$$E=\left\{(x,y)\middle|(x,y)\text{满足条件}C\right\}.$$

例如，平面上以原点为中心，r 为半径的圆内所有点的集合是

$$E=\{(x,y)|x^2+y^2<r^2\}.$$

现在，引入平面中邻域的概念.

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是平面上一点，δ 是一正数. 与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$ 或 $U(P_0)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P|\ |P_0P|<\delta\}=\{(x,y)|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

且称 P_0 为邻域 $U(P_0,\delta)$ 的中心，δ 为邻域半径.

不包含点 P_0 在内的邻域称为点 P_0 的空心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(P_0,\delta)$ 或 $\mathring{U}(P_0)$，即

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P|\ 0<|P_0P|<\delta\}=\{(x,y)|0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

在几何上，邻域 $U(P_0,\delta)$ 就是平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心，δ 为半径的圆的内部的点 $P(x,y)$ 的全体.

2. n 维空间

设 n 元有序实数组为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，称该有序组的全体为 n 维空间，记为

$$R^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\big|x_i\in R,i=1,2,\cdots,n\}.$$

R^n 中的每个元素 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 n 维空间中的一个点，x_i 称为该点的第 i 个坐标.

设点 $M(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$N(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为 R^n 中的两点，我们规定 M、N 两点间的距离为

$$|MN|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

显然，当 $n=1,2,3$ 时，上式就是解析几何中在直线、平面、空间中两点间的距离公式.

有了两点间的距离规定之后，就可以把平面点集中的邻域的概念推广到 R^n 中去. 设 $P_0\in R^n$，δ 是一正数，那么 R^n 中的点集

$$U(P_0,\delta)=\{P\big|\ |P_0P|<\delta,P\in R^n\}$$

就称为点 P_0 的 δ 邻域.

二、多元函数的概念

1. 二元函数的概念

在很多自然现象以及实际问题中，经常会遇到一个变量依赖于多个变量的关系，下面先看例子.

例 1 正圆锥体的体积 V 和它的高 h 及底面半径 r 之间的关系为 $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$. 当 r 和 h 在集合 $\left\{(r,h)\big|r>0,h>0\right\}$ 内取定一组数时，通过关系式 $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$，V 有唯一确定的值与之对应.

上面例子说明，在一定的条件下三个变量之间存在着一种依赖关系，这种关系给出了一个变量与另外两个变量之间的对应法则，依照这个法则，当两个变量在允许的范围内取定一组数时，另一个变量有唯一确定的值与之对应. 由这些共性便可得到以下二元函数的定义.

定义 1.1 设 D 是平面上的一个点集，如果对于 D 内任意一点 $P(x,y)$，变量 z 按照某一对应法则 f 总有唯一确定的值与之对应，则称 z 是变量 x，y 的二元函数（或称 z 是点 P 的函数），记作

$$z=f(x,y),(x,y)\in D$$

或

$$z=f(P),P\in D.$$

其中点集 D 称为函数的定义域，x，y 称为自变量，z 称为因变量，数集 $\left\{z\big|z=f(x,y),(x,y)\in D\right\}$ 称为该函数的值域. z 是 x，y 的函数，也可记为 $z=z(x,y)$.

例 2 求函数 $z=\arcsin(x^2+y^2)$ 的定义域.

解 要使 $\arcsin(x^2+y^2)$ 有意义，必须有 $|x^2+y^2|\leqslant 1$，

所以定义域为 $$\{(x,y)\big|x^2+y^2\leqslant 1\}.$$

设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，对任一点 $(x,y)\in D$，必有唯一的 $z=f(x,y)$ 与之对

应. 这样，以 x 为横坐标，y 为纵坐标，$z=f(x,y)$ 为高度坐标，在空间确定一个点 $P(x,y,z)$. 当 (x,y) 取遍 D 上一切点时，相应地得到一个空间点集

$$\{(x,y,z)|z=f(x,y),(x,y)\in D\},$$

这个点集称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形. 通常 $z=f(x,y)$ 的图形是一张曲面，函数 $f(x,y)$ 的定义域 D 便是该曲面在 xOy 面上的投影区域.

2. n 元函数的概念

定义 1.2　设集合 E 为 R^n 中的一个点集，如果对于 E 中任意一点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，变量 u 按照某一对应法则 f 总有唯一确定的值与之对应，则称 u 是定义在 E 上的 n 元函数，记作

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E,$$

或

$$u=f(P),P\in E.$$

点集 E 称为函数的定义域，数集 $\{u|u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E\}$ 称为该函数的值域.

在定义 1.2 中，分别令 $n=2$ 和 $n=3$，便得到二元函数和三元函数的定义. 二元及二元以上的函数统称为多元函数.

三、多元函数的极限

设二元函数 $z=f(x,y)$ 定义在平面点集 D 上，$P_0(x_0,y_0)$ 为点集 D 的聚点，是指对于任意给定的 $\delta>0$，点 P 的空心邻域 $\mathring{U}(P_0,\delta)$ 内总有 D 中的点. 我们来讨论当点 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$，即点 $x\to x_0$， $y\to y_0$ 时函数 $z=f(x,y)$ 的极限.

这里 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 是指点 P 以任意的方式趋于 P_0，亦即两点 P 与 P_0 之间的距离趋于零，也就是

$$|P_0P|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0.$$

与一元函数的极限概念类似，如果在 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 的过程中，$P(x,y)$ 所对应的函数值 $z=f(x,y)$ 无限接近于一个常数 A，则称当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $z=f(x,y)$ 以 A 为极限.

定义 1.3　设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，且 $P_0\in D$，A 是一个常数. 如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当 $P(x,y)\in\mathring{U}(P_0,\delta)\cap D$ 时，恒有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时函数 $z=f(x,y)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$$

或

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A,$$

也记作

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A .$$

二元函数的极限也称为二重极限.

例 3　设函数 $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$，证明：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

证　由于

$$\left|f(x,y)-0\right| = \left|\sin\sqrt{x^2+y^2}-0\right| \leqslant \sqrt{x^2+y^2} ,$$

可见，对任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，当

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta ,$$

即 $P(x,y)\in \overset{\circ}{U}(P_0,\delta)\cap D$ 时，恒有

$$\left|f(x,y)-0\right| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon ,$$

成立，根据二元函数极限的定义，证得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0 .$$

所谓二重极限存在，是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 都无限接近于同一个常数 A. 因此，当 P 以某种特殊方式趋近于 P_0，即使函数 $f(x,y)$ 无限接近于某一常数，也不能断定二重极限存在. 但当 P 以某种特殊方式趋近于 P_0 时，函数 $f(x,y)$ 的极限不存在，或者当 P 沿两种特殊方式趋近于 P_0 时，函数 $f(x,y)$ 分别无限趋近于两个不同的常数，则可以断定二重极限不存在.

例 4　讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，当 $(x,y)\to(0,0)$ 时是否存在极限.

解　当点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2} .$$

其值因 k 而异，这与极限定义中当 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 都无限接近于同一个常数 A 的要求相违背，因此当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 的极限不存在.

四、多元函数的连续

有了二元函数极限的概念，仿照一元函数连续的定义，不难得出二元函数连续的定义.

定义 1.4　设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，且 $P_0\in D$. 如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 处连续.

若记 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=y-y_0$，则称

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

为函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的全增量. 与一元函数一样，可用增量的形式来描述连续性，即当

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta z=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=0$$

时，函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

若函数 $f(x,y)$ 在 D 上每一点都连续，则称 $f(x,y)$ 在 D 上连续，或称 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数.

若 $f(x,y)$ 在 P_0 点不连续，则称 P_0 是函数 $f(x,y)$ 的间断点.

当函数 $f(x,y)$ 在 P_0 点没有定义；或虽有定义，但当 $P\to P_0$ 时函数 $f(x,y)$ 的极限不存在；或极限虽存在，但极限值不等于该点处的函数值，则 P_0 都是函数 $f(x,y)$ 的间断点. 例如，函数 $f(x，y)=\dfrac{x-y}{x-y^2}$ 在曲线 $x=y^2$ 上每一点处都没有定义，所以曲线 $x=y^2$ 上每一点都是该函数的间断点.

根据极限的运算法则和多元函数连续性的定义，不难证明多元连续函数的和、差、积、商（分母不等于零）也都是连续函数. 多元连续函数的复合函数也是连续函数.

多元初等函数是指由常数及具有不同自变量的一元初等函数经过有限次的四则运算或复合形成的能用一个式子表示的函数. 多元初等函数在其定义区域内是连续的. 所谓定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

类似于闭区间上一元连续函数的性质，在有界闭区域上的多元连续函数具有以下性质：

（1）在有界闭区域上连续的多元函数，在该区域上有最大值与最小值；

（2）在有界闭区域上连续的多元函数，在该区域上有界；

（3）在有界闭区域上连续的多元函数，必能取得介于最大值与最小值之间的任何值.

习题 7.1

1. 求下列函数的定义域，并作出定义域的草图.

（1）$z=\dfrac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2}$；　　（2）$z=\ln x-2\ln y$.

2. 求下列各极限.

（1）$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2-4y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$；　　（2）$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{x}$；

（3）$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$；　　（4）$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3. 证明下列极限不存在.

（1）$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$；　　（2）$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x-y}$.

4. 求下列函数的间断点.

（1）$z=\sin\dfrac{2}{x-y}$；　　（2）$z=\dfrac{\sin(x+y)}{1-x^2-y^2}$.

第二节　偏　导　数

在一元函数中，我们通过函数的增量与自变量增量之比的极限引出了导数的概念，这个

比值的极限刻画了函数对于自变量的变化率. 对于多元函数同样需要讨论它的变化率，由于多元函数的自变量多于一个，使得变化率问题变得较为复杂. 本节首先考虑多元函数关于其中一个自变量的变化率，即讨论只有一个自变量变化，而其余自变量固定不变（视为常量）时函数的变化率.

一、偏导数

1. 偏导数定义及其计算

定义 2.1　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 保持不变，而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时（点（ $x_0+\Delta x, y_0$ ）仍在该邻域中），相应地函数有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记作 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ ， $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ ， $z_x(x_0,y_0)$ 或 $f_x(x_0,y_0)$ [①]，即

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

类似地，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记作 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$ ， $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$ ， $z_y(x_0,y_0)$ 或 $f_y(x_0,y_0)$.

由偏导数的定义可知，二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ ，实际上就是把 y 固定在 y_0 时，一元函数 $f(x,y_0)$ 在 x_0 点的导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ ； $f_y(x_0,y_0)$ 就是一元函数 $f(x_0,y)$ 在 y_0 点的导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}$.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数就是 x ， y 的函数，称它为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数，记作 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\dfrac{\partial f}{\partial x}$， z_x 或 $f_x(x,y)$.

类似地，可定义函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数，记作 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$， $\dfrac{\partial f}{\partial y}$， z_y 或 $f_y(x,y)$. 偏导函数也简称为偏导数.

显然函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 就是偏导函数 $f_x(x,y)$ 在点

---

① 偏导数记号 z_x ， f_x 也常记作 z'_x ， f'_x .

(x_0,y_0) 处的函数值；$f_y(x_0,y_0)$ 就是偏导函数 $f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值.

至于实际求 $z=f(x,y)$ 的偏导数，并不需要用新的方法，因为偏导数的实质就是把一个自变量固定，而将二元函数 $z=f(x,y)$ 看成是另一个自变量的一元函数的导数. 计算 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 时，只要把 y 看作常数，而对 x 求导数；类似地，计算 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 时，只要把 x 看作常数，而对 y 求导数.

二元以上的函数的偏导数可类似定义. 例如三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处对 x 的偏导数可定义为

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}$$

其中 (x,y,z) 是函数 $u=f(x,y,z)$ 的定义域的内点.

求二元以上函数对某个自变量的偏导数也只需把其余自变量都看作常数而对该自变量求导即可.

例 1　求二元函数 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$ 的偏导数.

解　对 x 求偏导数时，把 y 看作常数，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}\ ;$$

对 y 求偏导数时，把 x 看作常数，则

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}\ .$$

例 2　求二元函数 $z=\sin^2 xy+\cos(x+y)$ 的偏导数.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2\sin xy\cos xy\cdot y-\sin(x+y)=y\sin 2xy-\sin(x+y)\ ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2\sin xy\cos xy\cdot x-\sin(x+y)=x\sin 2xy-\sin(x+y)\ .$$

2. 偏导数的几何意义

在空间直角坐标系中，二元函数 $z=f(x,y)$ 的图像是一张空间曲面 S . 根据偏导数的定义，$f_x(x_0,y_0)$ 就是把 y 固定在 y_0 ，一元函数 $f(x,y_0)$ 在 x_0 点的导数. 而在几何上，一元函数 $z=f(x,y_0)$ 表示曲面 S 与平面 $y=y_0$ 的交线 $C_1:\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=y_0\end{cases}$,则由一元函数导数的几何意义知，$f_x(x_0,y_0)$ 就是曲线 C_1 在点 $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线 P_0T_x 对 x 轴的斜率，即 P_0T_x 与 x 轴正向所成倾角的正切 $\tan\alpha$（见图 7-1）.

同理，$f_y(x_0,y_0)$ 就是曲面 S 与平面 $x=x_0$ 的交线 $C_2:\begin{cases}z=f(x,y)\\ x=x_0\end{cases}$ 在点 P_0 处的切线 P_0T_y 对 y 轴的斜率 $\tan\beta$（见图 7-2）.

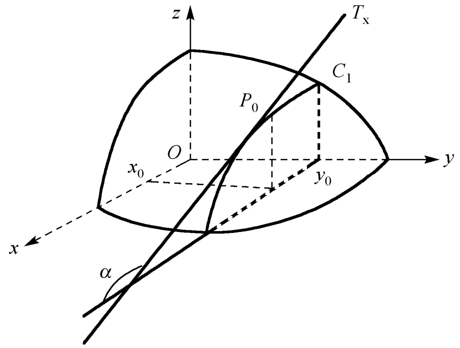


图 7-1

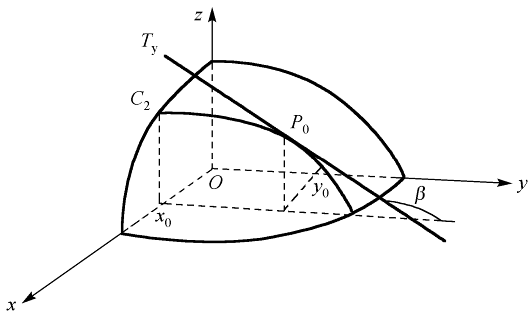


图 7-2

例 3　求曲线$\begin{cases} z=1+\sqrt{2+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$在点$M(1,\ 1,\ 3)$处的切线与$y$轴正向的夹角.

解
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{2+x^2+y^2}},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=\left.\frac{y}{\sqrt{2+x^2+y^2}}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=\frac{1}{2},$$

用α表示曲线$\begin{cases} z=1+\sqrt{2+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$在点$M(1,\ 1,\ 3)$处的切线与$y$轴正向的夹角，则$\tan\alpha=\frac{1}{2}$，所以$\alpha=\arctan\frac{1}{2}\approx 26^\circ 34'$.

3. 偏导数与连续的关系

我们知道，若一元函数$y=f(x)$在点x_0处可导，则$f(x)$必在点x_0处连续. 但对于二元函数$z=f(x,y)$来讲，即使在点(x_0,y_0)处的两个偏导数都存在，也不能保证函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续. 这是因为偏导数$f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$存在只能保证一元函数$z=f(x,y_0)$和$z=f(x_0,y)$分别在x_0和y_0处连续，但不能保证(x,y)以任何方式趋于(x_0,y_0)时，函数$f(x,y)$都趋于$f(x_0,y_0)$.

例 4　求二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

在点$(0,0)$处的偏导数，并讨论它在点$(0,0)$处的连续性.

解　点$(0,0)$是函数$f(x,y)$的分界点，类似于一元函数，分段函数分界点处的偏导数要用定义去求.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

又由于函数关于自变量x，y是对称的，故$f_y(0,0)=0$.

我们在第一节已经知道$f(x,y)$在点$(0,0)$处不连续.

当然，$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续也不能保证$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的偏导数存在.

二、高阶偏导数

设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)，$$

一般来讲，在 D 内 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 仍然是 x，y 的函数，如果 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 关于 x，y 的偏导数也存在，则称 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 的偏导数是函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数. 按照对两个自变量求导次序不同，二元函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数有如下四种情形：

对 x 的二阶偏导数：$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)$，

先对 x 后对 y 的二阶偏导数：$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$，

先对 y 后对 x 的二阶偏导数：$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)$，

对 y 的二阶偏导数：$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$ ①.

如果二阶偏导数的偏导数存在，就称它们是函数 $f(x,y)$ 的三阶偏导数. 如 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}$，$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$ 等. 类似地，可以定义四阶、五阶、…、n 阶偏导数. 二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数. 如果高阶偏导数中既有对 x 也有对 y 的偏导数，则此高阶偏导数称为混合偏导数，如 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

例 5　设函数 $z=x^2y+xy^2-x+y$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy+y^2-1，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2xy+1，$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x+2y=2(x+y).$$

在此例中，两个二阶混合偏导数相等，即 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，但这个结论并非对任何函数都成立，只有在满足一定条件时，二阶混合偏导数才与求偏导的次序无关.

定理 2.1　如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数相等.

换句话说，两个二阶混合偏导数在偏导数连续的条件下与求偏导的次序无关.

① 二阶偏导数记号 f_{xx}，f_{xy}，f_{yx}，f_{yy} 也常记作 f''_{xx}，f''_{xy}，f''_{yx}，f''_{yy}.

习题 7.2

1. 求下列函数的偏导数.

（1） $z = xy^2 + \sqrt{\dfrac{x}{y}}$；　　（2） $z = \sqrt{\ln(x-2y)}$；

（3） $z = \ln(x^3 + \ln y)$；　　（4） $u = z^{\frac{x}{y}}$.

2. 设 $f(x,y) = \dfrac{2x+y}{\sqrt{xy}}$，求 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,4)}$ 及 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,4)}$.

3. 求下列函数的二阶偏导数.

（1）设 $z = x\ln xy$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；

（2） $z = \arctan\dfrac{x+y}{x-y}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

4. 验证：

（1） $z = \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$ 满足方程 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$；

（2） $z = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$.

第三节　全　微　分

在一元函数中，我们讨论了函数微分的概念、计算和应用等内容，从这一节开始，我们讨论多元函数的全微分的内容.

一、全微分的定义

定义 3.1　设函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，点 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 为该邻域内任意一点，若函数在点 (x_0,y_0) 处的全增量 $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ 可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \tag{3.1}$$

其中 A，B 仅与点 (x_0,y_0) 有关，而与 Δx，Δy 无关，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，$o(\rho)$ 是当 $\rho \to 0$ 时较 ρ 高阶的无穷小量，即 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{o(\rho)}{\rho} = 0$，则称函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是可微的，并称 $A\Delta x + B\Delta y$ 为函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全微分，记作 $\mathrm{d}z\big|_{(x_0,y_0)}$，即

$$\mathrm{d}z\big|_{(x_0,y_0)} = A\Delta x + B\Delta y\,. \tag{3.2}$$

二、可微的条件

定理 3.1（可微的必要条件）　若 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则

（1） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续；

（2） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数存在，且 $A=f_x(x_0,y_0)$， $B=f_y(x_0,y_0)$.

证　由函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，故

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho).$$

若给 x 一个增量，固定 y 不动，此时 $\Delta y=0$，且 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+0^2}=|\Delta x|$，因此

$$\Delta z=A\Delta x+o(|\Delta x|),$$

则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x+o(|\Delta x|)}{\Delta x}=A.$$

故函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数是存在的，且 $A=f_x(x_0,y_0)$. 同理，可证明 $f_y(x_0,y_0)$ 也是存在的，且 $B=f_y(x_0,y_0)$. 证毕.

根据此定理， $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全微分可以写成

$$\mathrm{d}z\big|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

$z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全微分又可以写成

$$\mathrm{d}z\big|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y. \tag{3.3}$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上每一点都可微，则称函数在区域 D 上可微，且 $z=f(x,y)$ 在 D 上的全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y. \tag{3.4}$$

在一元函数中，函数在某点可导与可微是等价的，但对于多元函数来说，情形就不同了，函数的偏导数存在，不一定能保证函数可微. 当偏导数存在时，虽然在形式上能写出 $f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$，但它与 Δz 的差不一定是当 $\rho\to 0$ 时较 ρ 高阶的无穷小量，只有当 $\Delta z-[f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y]=o(\rho)$ 时，即 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-[f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\rho}=0$ 时，才能说函数在该点可微.

定理 3.2（可微的充分条件）　若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数在点 (x_0,y_0) 的某邻域内存在，且 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，则函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微.

注意，偏导数连续只是函数可微的充分条件，不是必要条件.

例 1　证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处可微，但在点 $(0,0)$ 处偏导数不连续.

证
$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}=0,$$

由于函数关于自变量是对称的，则 $f_y(0,0)=0$. 于是

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\dfrac{1}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]}}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\sin\dfrac{1}{\rho^2}}{\rho}=0,$$

所以函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，由 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 有

$$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right),$$

当点 (x,y) 沿 x 轴趋于 $(0,0)$ 时，由于 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}2x\sin\dfrac{1}{x^2}=0$，$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}$ 不存在，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)$ 不存在，即 $f_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续，同理 $f_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处也不连续.

根据前面的讨论，函数 $f(x,y)$ 连续，偏导数存在，可微的关系可表示为

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{偏导数存在} \arrow[dl, shift left, "/" marking] \arrow[dd, shift left, "/" marking] \\
\text{偏导数连续} \arrow[r, shift left] & \text{可微} \arrow[l, shift left, "/" marking] \arrow[ur, shift left] \arrow[dr, shift left] & \\
 & & \text{连续} \arrow[ul, shift left, "/" marking] \arrow[uu, shift left, "/" marking]
\end{tikzcd}$$

以上关于全微分的定义及可微的必要条件和充分条件可以完全类似地推广到三元及三元以上的函数. 例如，若三元函数 $u=f(x,y,z)$ 的三个偏导数都存在且连续，则它的全微分存在，并有

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

例 2　求函数 $z=2x^2y+xy^2$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=4xy+y^2,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=(4xy+y^2)\Big|_{(1,2)}=12,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2+2xy,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=(2x^2+2xy)\Big|_{(1,2)}=6,$$

由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $(1,2)$ 处连续，所以函数 $z=2x^2y+xy^2$ 在点 $(1,2)$ 处可微，且有

$$\mathrm{d}z\big|_{(1,2)}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}\mathrm{d}x+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}\mathrm{d}y=12\mathrm{d}x+6\mathrm{d}y.$$

习题 7.3

1. 求下列函数的全微分.

（1）$z=\cos\left(x+\dfrac{1}{y}\right)$；　　（2）$z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$；

（3）$u=\ln(x-2y+3z)$；　　（4）$u=z^{x^2+y^2}$.

2. 当 $x=2$，$y=-1$，$\Delta x=-0.1$，$\Delta y=0.2$ 时，求函数 $z=\dfrac{y^2}{x}$ 的全增量 Δz 及全微分 $\mathrm{d}z$.

3. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，在 $\rho(0,0)$ 点处讨论偏导数的存在性、偏导数的连续性以及函数 $f(x,y)$ 的可微性.

第四节　多元函数的微分法

在一元函数中，我们介绍了复合函数的求导法则：如果函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导而 $y=f(u)$ 在对应点 u $(u=\varphi(x))$ 处可导，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x 处可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

现在研究将这一微分法则推广到多元复合函数的情形，并按照多元复合函数不同的复合情形，分情况讨论.

一、复合函数的微分法

1. 复合函数的中间变量均为一元函数的情形

定理 4.1　设函数 $u=\varphi(t)$，$v=\psi(t)$ 在点 t 处可导，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处可微，则复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点 t 处可导，并且有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{4.1}$$

为了便于掌握复合函数的求导法则，常用函数结构图来表示变量之间的复合关系. 例如定理 4.1 的函数结构图如下.

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[r] & t \\ z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & v \arrow[r] & t \end{tikzcd}$$

（4.1）式称为全导数公式.

（4.1）式可以推广到复合函数的中间变量多于两个的情形. 例如，由 $z=f(u,v,w)$，$u=\varphi(t)$，$v=\psi(t)$，$w=\omega(t)$ 复合而成的复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]$，在与定理 4.1 类似的条件下有全导数公式

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}. \tag{4.2}$$

例 1　设 $z=uv$，$u=\mathrm{e}^t$，$v=\cos t$，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

解　由全导数公式（4.1），有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\&=v\mathrm{e}^t+u(-\sin t)\\&=\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t).\end{aligned}$$

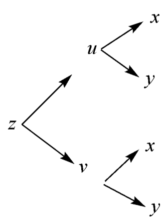
2. 复合函数的中间变量均为多元函数的情形

定理 4.2　若 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 处都存在偏导数，$z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处可微，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 处存在偏导数，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\tag{4.3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.\tag{4.4}$$

定理 4.2 的函数结构图如下.



（4.3）式和（4.4）式可以推广到中间变量或自变量多于两个的情形. 例如，设 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，$w=\omega(x,y)$ 在点 (x,y) 处都具有偏导数，而函数 $z=f(u,v,w)$ 在对应点 (u,v,w) 可微，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y),\omega(x,y)]$ 在点 (x,y) 处具有偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

例 2　设 $z=\mathrm{e}^{xy}\sin(x+y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　令 $u=xy$，$v=x+y$，则 $z=\mathrm{e}^u\sin v$，所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\&=\mathrm{e}^u\sin v\cdot y+\mathrm{e}^u\cos v\cdot 1\\&=\mathrm{e}^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\\&=\mathrm{e}^u\sin v\cdot x+\mathrm{e}^u\cos v\cdot 1\\&=\mathrm{e}^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)].\end{aligned}$$

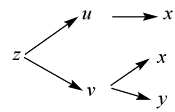
3. 复合函数的中间变量既有一元函数又有多元函数的情形

定理 4.3　设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，$v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 处存在偏导数，而 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处可微，则复合函数 $z=f[\varphi(x),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 处存在偏导数，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

定理 4.3 的结构图如下.



定理 4.4　函数 $z=f(u,x,y)$ 具有连续偏导数，而 $u=\varphi(x,y)$ 具有偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),x,y]$ 在点 (x,y) 处存在偏导数，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},\tag{4.5}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}.\tag{4.6}$$

为了避免混淆，（4.5）式和（4.6）式右端的 z 换成了 f，要注意 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是不同的，$\frac{\partial f}{\partial x}$ 是把 $f(u,x,y)$ 中的 u 及 y 看成不变而对 x 求偏导数，$\frac{\partial z}{\partial x}$ 是把复合函数 $z=f[\varphi(x,y),x,y]$ 中的 y 看成不变而对 x 求偏导数.

例 3　设 $u=f(x,y,z)=\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}$，而 $z=x^2\sin y$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$.

解

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=2x\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}+2z\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}\cdot 2x\sin y\\&=2x(1+2x^2\sin^2 y)\mathrm{e}^{x^2+y^2+x^4\sin^2 y},\\\frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=2y\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}+2z\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}\cdot x^2\cos y\\&=2(y+x^4\sin y\cos y)\mathrm{e}^{x^2+y^2+x^4\sin^2 y}.\end{aligned}$$

二、多元复合函数的高阶偏导数

在前面已经给出高阶偏导数的定义，这里通过一个实例说明求复合函数高阶偏导数的方法.

例 4　设 $z=f(x+y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解　令 $u=x+y$，$v=xy$，则 $z=f(u,v)$，于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_u+yf_v,$$

在求二阶偏导数时注意到 f_u 及 f_v 仍是 u、v 的函数，而 u、v 是 x、y 的函数.

应用多元复合函数的求导法则得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(f_u + y f_v) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(f_u) + \frac{\partial}{\partial y}(y f_v) = \frac{\partial}{\partial y}(f_u) + f_v + y\frac{\partial}{\partial y}(f_v) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial u}(f_u)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}(f_u)\frac{\partial v}{\partial y}\right) + f_v + y\left(\frac{\partial}{\partial u}(f_v)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}(f_v)\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= (f_{uu}\cdot 1 + f_{uv}\cdot x) + f_v + y(f_{vu} + f_{vv}\cdot x) \\
&= f_{uu} + (x+y) f_{uv} + xy f_{vv} + f_v\ .
\end{aligned}
$$

这里因为 f 具有二阶连续偏导数，故有 $f_{uv} = f_{vu}$，因此可以合并 $x f_{uv} + y f_{vu} = (x+y) f_{uv}$.

为方便起见，有时用自然数 1、2 的顺序分别表示函数 $f(u,v)$ 中的两个中间变量 u 、 v ，这样 $\frac{\partial f}{\partial u}$、 $\frac{\partial f}{\partial v}$ 、 $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ 、 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ 分别用 f_1、 f_2、 f_{12}、 f_{11} 和 f_{22} 来表示，则有

$$
\frac{\partial z}{\partial x} = f_1 + y f_2 ,
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(f_1 + y f_2) = \frac{\partial}{\partial y}(f_1) + f_2 + y\frac{\partial}{\partial y}(f_2) \\
&= f_{11} + x f_{12} + f_2 + y(f_{21} + x f_{22}) \\
&= f_{11} + (x+y) f_{12} + xy f_{22} + f_2 .
\end{aligned}
$$

习题 7.4

1. 设函数 $z = x\,\mathrm{e}^{u-2v} - 1$，而 $u = \sin x + 2$， $v = \frac{1}{x} - 1$，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

2. 设函数 $z = \ln(2x + y)$，而 $x = \sqrt{t}$， $y = \sin^2 t$，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

3. 设函数 $z = (x^2 + y^2)^{xy-1}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

4. 设 $z = u^2 \ln v$， $u = \frac{x}{y}$， $v = 3x - 2y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

5. 求下列函数的一阶偏导数，其中 f 具有一阶连续偏导数.

（1） $z = f(xy，x^2 - y^2)$；　　　　（2） $z = f\left(\frac{x}{y}, \mathrm{e}^{x+y}\right)$.

6. 设函数 $z = xyf\left(\frac{y}{x}\right)$，其中 $f(u)$ 是可微函数，证明： $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

7. 设函数 $z = f(x, \frac{x}{y})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

第五节　隐函数的微分法

我们在第二章已经提出了隐函数的概念，并且指出在不经过显式化的情况下，直接由方程

$$F(x,y)=0$$

求出它所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数的方法. 从这节开始，我们学习多元函数所确定的隐函数的求导方法.

一、一个方程所确定的隐函数的微分法

定理 5.1（隐函数存在定理 1） 设函数 $F(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内具有连续的偏导数 $F_x(x,y)$，$F_y(x,y)$，且 $F(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内能唯一确定一个单值连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}. \tag{5.1}$$

例 1 说明由方程 $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ 在点 $(0,1)$ 的某邻域内能确定一个单值的隐函数 $y=f(x)$，并求出 $y=f(x)$ 的一阶导数.

解 函数 $F(x,y)=x^2+y^2-1$ 在点 $(0,1)$ 的某邻域内具有连续的偏导数

$$F_x=2x,\quad F_y=2y,$$

且 $F(0,1)=0$，$F_y(0,1)=2\neq 0$，即 $F(x,y)$ 满足隐函数存在定理 5.1 的条件，所以方程 $F(x,y)=0$ 在点 $(0,1)$ 的某邻域内能确定一个单值的隐函数 $y=f(x)$，由（5.1）式得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{x}{y}.$$

定理 5.2（隐函数存在定理 2） 设函数 $F(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内具有连续的偏导数且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内能唯一确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}. \tag{5.2}$$

例 2 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $2x^2+y^2+z^2-2z=0$ 确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 设 $F(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2-2z$，则

$$F_x=4x,\quad F_y=2y,\quad F_z=2z-2,$$

则由（5.2）式得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{4x}{2z-2}=\frac{2x}{1-z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2y}{2z-2}=\frac{y}{1-z}.$$

二、方程组所确定的隐函数的微分法

定理 5.3（隐函数存在定理 3） 设函数 $F(x,y,u,v)$，$G(x,y,u,v)$ 在点 (x_0,y_0,u_0,v_0) 的某一

邻域内对各个变量具有连续的偏导数，又 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，且偏导数所组成的函数行列式（或称雅可比行列式）

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

在点 (x_0,y_0,u_0,v_0) 不等于零，则方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 在点 (x_0,y_0,u_0,v_0) 的某邻域内能唯一确定一组单值连续且具有连续偏导数的函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，且它们满足条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.$$

例 3　求由方程组 $\begin{cases}x+y+z=1\\ x^2+y^2+z^2=4\end{cases}$ 所确定函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解　方程组 $\begin{cases}x+y+z=1\\ x^2+y^2+z^2=4\end{cases}$ 两边同时对 x 求导，有

$$\begin{cases}1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\\ 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0.\end{cases}$$

消去 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，有

$$x+y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-z\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0,$$

得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{z-x}{y-z},$$

而

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y}{y-z}.$$

习题 7.5

1. 设 $x+y=\arctan y$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2. 设 $x^2+y^2-z^2=2xyz$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3. 设 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4. 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，证明 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.

5. 设 $xyz-\mathrm{e}^z=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

6. 设 $z^3-3xyz=a^3$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

第六节　多元函数微分学在几何上的应用

第三章和第四章的部分内容介绍了一元函数微分学在不同领域中的应用. 本节及下节将介绍多元函数微分学的具体应用.

一、空间曲线的切线与法平面

设空间曲线 $\varGamma$ 的参数方程为

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),$$

其中 $x'(t)$，$y'(t)$，$z'(t)$ 存在且不同时为零.

在曲线 $\varGamma$ 上取对应于 $t=t_0$ 的一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 及对应于 $t=t_0+\Delta t$ 的邻近一点 $P(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$，则曲线的割线 P_0P 的方程为

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z},$$

用 Δt 去除上式各分母，得

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\dfrac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

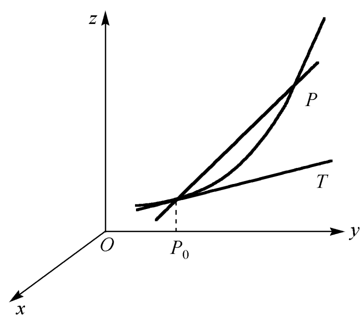


图 7-3

当点 P 沿着曲线 $\varGamma$ 趋于点 P_0 时，割线 P_0P 的极限位置 P_0T 就是曲线 $\varGamma$ 在点 P_0 处的切线（见图 7-3）.

令 $P\to P_0$（这时 $\Delta t\to 0$），对上式取极限，就得到曲线 $\varGamma$ 在点 P_0 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}.$$

这里要求 $x'(t_0)$，$y'(t_0)$，$z'(t_0)$ 不全为零.

切线的方向向量称为曲线的切向量. 向量 $\boldsymbol{T}=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$ 就是曲线 $\varGamma$ 在点 P_0 处的一个切向量.

通过点 P_0 而与切线垂直的平面称为曲线 $\varGamma$ 在点 P_0 处的法平面. 显然它是通过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 且以 $\boldsymbol{T}$ 为法向量的平面，因此法平面的方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

例 1　求曲线 $x=2t$，$y=2t^2$，$z=t^3$ 在点 $(2,2,1)$ 处的切线方程与法平面方程.

解　点 $(2,2,1)$ 对应的参数为 $t=1$，又因为

$$x'(t)\big|_{t=1}=2,\quad y'(t)\big|_{t=1}=4t\big|_{t=1}=4,\quad z'(t)\big|_{t=1}=3t^2\big|_{t=1}=3,$$

所以曲线在点 $(2,2,1)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-1}{3},$$

法平面方程为 $2(x-2)+4(y-2)+3(z-1)=0$，即

$$2x+4y+3z-15=0.$$

如果空间曲线 Γ 的方程由

$$y=y(x),z=z(x)$$

的形式给出，曲线 Γ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)}.$$

其中 $y_0=y(x_0)$，$z_0=z(x_0)$. 曲线 Γ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法平面方程为

$$x-x_0+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0.$$

例 2　求曲线 $y=1-x$，$z=\sqrt{1+2x-2x^2}$ 在点 $M(1,0,1)$ 处的切线方程及法平面方程.

解　由于 $y'(x)=-1$，$z'(x)=\dfrac{1-2x}{\sqrt{1+2x-2x^2}}$，于是

切向量为

$$T=(1,y'(x),z'(x))\big|_{x=1}=(1,-1,-1),$$

切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{-1},$$

法平面方程为

$$(x-1)-(y-0)-(z-1)=0,$$

即

$$x-y-z=0.$$

二、曲面的切平面与法线

曲面 Σ 上过点 P_0 的所有曲线在点 P_0 处的切线都在同一平面上，则称此平面为曲面 Σ 在点 P_0 处的切平面.

设曲面 Σ 的方程为 $F(x,y,z)=0$，$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面 Σ 上一点，函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处具有一阶连续偏导数，且 $F_x(x_0,y_0,z_0)$，$F_y(x_0,y_0,z_0)$，$F_z(x_0,y_0,z_0)$ 不同时为零，则切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

过点 P_0 且与切平面垂直的直线称为曲面在该点的法线. 法线的方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

如果曲面 Σ 的方程是由显函数 $z=f(x,y)$ 的形式给出，则可令

$$F(x,y,z)=f(x,y)-z,$$

当函数 $f(x,y)$ 的偏导数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续时，则曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程为

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

例 3　求椭球面 $2x^2+3y^2+3z^2=4$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面方程与法线方程.

解　设 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+3z^2-4$，则 $F_x=4x$，$F_y=6y$，$F_z=6z$，于是

$$F_x(1,1,1)=4,\ F_y(1,1,1)=6,\ F_z(1,1,1)=6,$$

因此切平面方程为

$$4(x-1)+6(y-1)+6(z-1)=0,$$

即

$$2x+3y+3z-8=0,$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{3}.$$

例 4　求旋转抛物面 $z=2x^2+2y^2-1$ 在点 $P_0(1,1,3)$ 处的切平面方程与法线方程.

解　设 $z=f(x,y)=2x^2+2y^2-1$，则

$$f_x(x,y)=4x,\quad f_y(x,y)=4y,\quad f_x(1,1)=4,\quad f_y(1,1)=4,$$

因此切平面方程为

$$z-3=4(x-1)+4(y-1),$$

即

$$4x+4y-z-5=0,$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{-1}.$$

习题 7.6

1. 求曲线 $x=\sqrt{2}\cos t,\ y=\sqrt{2}\cos t$，$z=2\sin t$ 在对应于 $t=\pi/4$ 的点处的切线及法平面方程.

2. 求螺旋线 $x=R\cos t$，$y=R\sin t$，$z=bt$（其中 R、b 为正常数）在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 对应点处的切线方程与法平面方程.

3. 求曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=4$ 在点 $M(1,\ 1,\ 4)$ 处的切平面及法线方程.

4. 求曲面 $z = xy$ 在点 $M(1, 2, 2)$ 处的切平面及法线方程.

5. 在椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 12$ 上求平行于平面 $x + 4y + 3z = 0$ 的切平面方程.

第七节　多元函数的极值与最值

在实际问题中，会经常遇到多元函数的最大值、最小值问题. 与一元函数的情形类似，多元函数的最大值、最小值与极大值、极小值有着密切的联系. 现以二元函数为例，先讨论多元函数极值的问题，再研究多元函数的最值和条件极值问题.

一、多元函数的极值

定义 7.1　设函数 $z = f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，如果对于该邻域内异于 P_0 的一切点 $P(x,y)$，都有

$$f(x,y) < f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 处有极大值 $f(x_0,y_0)$；如果对于该邻域内异于 P_0 的一切点 $P(x,y)$，都有

$$f(x,y) > f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 处有极小值 $f(x_0,y_0)$. 极大值、极小值统称为极值，使函数取得极值的点 $P_0(x_0,y_0)$ 称为极值点.

注意，这里所讨论的极值点只限于定义域的内点.

例 1　函数 $z(x,y) = x^2 + y^2$ 在点 $(0,0)$ 处有极小值. 因为对于点 $(0,0)$ 的任一邻域内一切异于 $(0,0)$ 的点，函数值皆为正，而在点 $(0,0)$ 的函数值为零，即

$$z(x,y) > z(0,0) = 0, (x,y) \neq (0,0).$$

从几何上看这是显然的，如图 7-4 所示，因为点 $(0,0,0)$ 是开口朝上的旋转抛物面的顶点.

例 2　函数 $z(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处有极大值. 因为对于点 $(0,0)$ 的充分小的邻域内一切异于 $(0,0)$ 的点的函数值都小于 1，而在点 $(0,0)$ 的函数值为 1，即

$$z(x,y) < z(0,0) = 1, (x,y) \neq (0,0).$$

如图 7-5 所示，点 $(0,0,1)$ 是上半球面的顶点.

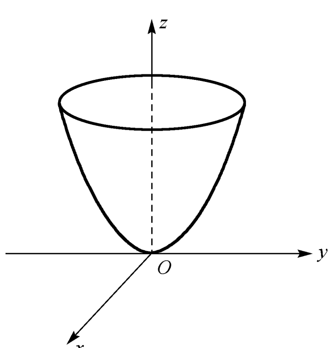


图 7-4

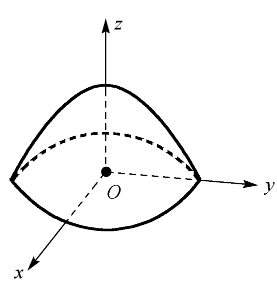


图 7-5

定理 7.1（极值的必要条件） 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处具有偏导数，且在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处取得极值，则必有

$$f_x(x_0,y_0)=0, \quad f_y(x_0,y_0)=0.$$

证 设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极大值. 根据极大值的定义，在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内不同于点 (x_0,y_0) 的点 (x,y) 均适合不等式

$$f(x,y)<f(x_0,y_0),$$

特别地，在该领域内取 $x\neq x_0$， $y=y_0$ 的点，也适合不等式

$$f(x,y_0)<f(x_0,y_0).$$

即一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值，因此 $f_x(x_0,y_0)=0$. 同理可证， $f_y(x_0,y_0)=0$.

凡使得 $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$ 成立的点 (x_0,y_0) 称为函数 $f(x,y)$ 的驻点或稳定点.

由定理 7.1 可知，偏导数存在的函数的极值点必定是驻点，但反过来，驻点未必是极值点. 如函数 $z=x^2-y^2$，由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y$，故点 $(0,0)$ 为其驻点，但这一点却不是函数的极值点.

定理 7.2（极值的充分条件） 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内具有二阶连续偏导数，且 $f_x(x_0,y_0)=0$， $f_y(x_0,y_0)=0$. 令

$$A=f_{xx}(x_0,y_0),\ B=f_{xy}(x_0,y_0),\ C=f_{yy}(x_0,y_0),\ \Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2$$

则 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处是否取得极值的条件如下：

（1）当 $\Delta>0$ 时，函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处有极值，且当 $A<0$ 时，有极大值，当 $A>0$ 时，有极小值；

（2）当 $\Delta<0$ 时，函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处没有极值；

（3）当 $\Delta=0$ 时，函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可能有极值，也可能没有极值，需另作讨论.

例 3 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+6x^2+3y^2+9x$ 的极值.

解 定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且函数处处可导，

由
$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+12x+9=0, \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (x+1)(x+3)=0, \\ y(y-2)=0, \end{cases}$$

得函数的所有驻点是 $P_1(-1,\ 0)$，$P_2(-1,\ 2)$，$P_3(-3,\ 0)$，$P_4(-3,\ 2)$.

$$A=f_{xx}(x,y)=6x+12,\ B=f_{xy}(x,y)=0,\ C=f_{yy}(x,y)=-6y+6,$$

对上述各点列表判定：

点	A	B	C	$AC-B^2$	结论
$P_1(-1,0)$	6>0	0	6	36>0	极小值点
$P_2(-1,2)$	6>0	0	−6	−36<0	不是极值点
$P_3(-3,0)$	−6<0	0	6	−36<0	不是极值点
$P_4(-3,2)$	−6<0	0	−6	36>0	极大值点

所以函数的极大值为 $f(-3,\ 2)=4$，极小值为 $f(-1,\ 0)=-4$.

二、多元函数的最值

在本章第一节中已经指出，如果函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上必定能取到最大值和最小值. 与一元函数的最值问题一样，求函数 $z=f(x,y)$ 在 D 上的最大值与最小值的步骤是：

（1）求出函数 $z=f(x,y)$ 在 D 内的所有驻点及偏导数不存在的点处的函数值；

（2）求出函数 $z=f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大值与最小值；

（3）将上述函数值与边界上的最大值与最小值进行比较，最大者即为最大值，最小者即为最小值.

特别地，如果可微函数 $f(x,y)$ 在 D 内只有唯一的驻点，又根据问题的实际意义知其最大值或最小值存在且在 D 内取得，则该驻点处的函数值就是所求的最大值或最小值.

例 4　在 xOy 面上求一点，使得该点到两坐标轴及直线 $3x+4y=50$ 的距离平方和最小.

解　设所求的点为 (x,y)，则目标函数为

$$H=x^2+y^2+\frac{(3x+4y-50)^2}{25}\ \ ((x,y)\in R^2),$$

由

$$\begin{cases}H'_x=2x+6(3x+4y-50)/25=0,\\ H'_y=2y+8(3x+4y-50)/25=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}17x+6y-75=0,\\ 12x+41y-200=0,\end{cases}$$

得唯一可能极值点

$$x=3,y=4,$$

由实际意义，一点到三条直线距离平方和有最小值，故所求点为 $(3,4)$.

三、条件极值

求目标函数在自变量满足一定限制条件下的极值问题称为条件极值问题. 在条件极值问题中，称要求极值的函数为目标函数，称自变量所满足的条件为约束条件.

关于条件极值的求法，有以下两种方法.

1. 转化为无条件极值

对一些简单的条件极值问题，往往可以利用附加条件，消去函数中某些自变量，转化为无条件极值.

例 5　在附加条件 $x-y=1$ 下，求函数 $z=x^2+y^2$ 的极值.

解　由条件 $x-y=1$，故 $y=x-1$，代入到目标函数 $z=x^2+y^2$ 之中，得

$$z=2x^2-2x+1.$$

由 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=4x-2=0$，得一元函数 $z=2x^2-2x+1$ 的唯一驻点 $x=\frac{1}{2}$，此时 $y=-\frac{1}{2}$，而 $\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\big|_{x=1/2}=4>0$，所以 $x=\frac{1}{2}$ 是一元函数 $z=2x^2-2x+1$ 的极小值点，所以当 $x=\frac{1}{2}$，$y=-\frac{1}{2}$ 时二元函数 $z=x^2+y^2$ 在附加条件 $x-y=1$ 下取得极小值，且极小值为 $f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，该函数在附加条件 $x-y=1$ 下无极大值.

2. 拉格朗日乘数法

但是在很多情况下，将条件极值转化为无条件极值往往比较复杂甚至相当困难. 下面介绍的拉格朗日乘数法是一种直接解决条件极值的方法.

求函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\phi(x,y)=0$ 下的可能极值点，按以下方法进行：

（1）构造拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\phi(x,y).$$

（2）将 $L(x,y,\lambda)$ 分别对 x,y,λ 求一阶偏导数，并使之为零得方程组

$$\begin{cases} L_x(x,y,\lambda)=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ L_y(x,y,\lambda)=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ L_\lambda(x,y,\lambda)=\varphi(x,y)=0. \end{cases}$$

（3）求出方程组的解 (x,y,λ)，其中 (x,y) 就是函数 $f(x,y)$ 在条件 $\phi(x,y)=0$ 下的可能极值点.

以上方法可以推广到自变量多于两个或附加条件多于一个的情形.

例 6　用铁板做一个容积为 8 m^3 的长方体有盖水箱，问如何设计最省材料？

解　设水箱的长、宽、高分别为 x、y、z，表面积为 A，则目标函数为 $A=2(xy+xz+yz)$（$x>0$，$y>0$，$z>0$），

附加条件为

$$xyz=8.$$

设 $L(x,y,z,\lambda)=2(xy+xz+yz)+\lambda(xyz-8)$（$x>0$，$y>0$，$z>0$），由

$$\begin{cases} L_x=2(y+z)+\lambda yz=0, \\ L_y=2(x+z)+\lambda xz=0, \\ L_z=2(x+y)+\lambda xy=0, \\ L_\lambda=xyz-8=0. \end{cases}$$

得唯一可能极值点

$$x=y=z=2,$$

根据实际意义，当长方体体积一定时，其表面积有最小值，所以当长、宽、高都为 2 m 时最省材料（此时用 24 m^2 的铁板）.

习题 7.7

1. 求下列函数的极值：

（1） $f(x,y)=2x-x^2-y^2$；　　（2） $f(x,y)=\mathrm{e}^x(x+2y+y^2)$.

2. 求函数 $z=2x^2+3y^2-1$ 在闭区域 D：$x^2+y^2\leqslant 4$ 上的最小值与最大值.

3. 用面积为 12 m^2 铁板做一个长方体无盖水箱，问如何设计容积最大？

4. 在斜边长为 l 的直角三角形中，求周长最大的三角形及其周长.

第八章　多元函数积分学

在第四章我们学习了一元函数积分学，定积分是由一元函数在有限闭区间上作出的某种确定和式的极限. 如果把这个概念推广到定义在平面区域上的二元函数就建立了二重积分，进一步推广到定义在空间中某点集上的三元函数可得到三重积分，定义在平面曲线上的函数可得到曲线积分. 这些积分都与定积分有一定的联系. 本章主要介绍二重积分、三重积分以及曲线积分的概念、性质、计算以及它们之间的联系.

第一节　二重积分的概念及性质

一、实例

例　曲顶柱体的体积

设在空间 $Oxyz$ 中有一立体 Ω，其底是平面 xOy 上的有界闭区域 D，顶是连续曲面 $z=f(x,y)$（其中 $f(x,y)\geqslant 0$），侧面是以 D 的边界为准线、母线平行于 Z 轴的柱面，称 Ω 为曲顶柱体.

下面求曲顶柱体的体积.

我们知道，平顶柱体的体积是底面积×高，它的高是不变的. 对于曲顶柱体来说，当点 (x,y) 在闭区域 D 上变动时，高 $f(x,y)$ 是变量，因此它的体积不能直接用这个公式计算. 在第四章我们讨论过曲边梯形的面积，由此想到用类似的方法解决这个问题（见图 8-1）.

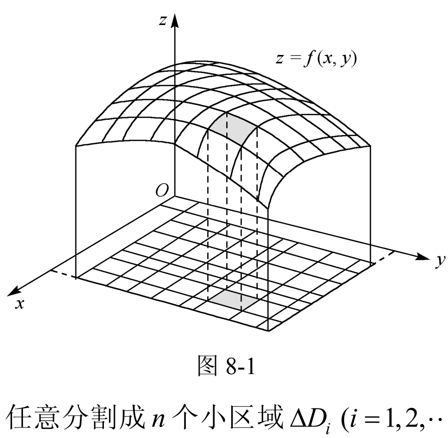


图 8-1

（1）分割：将闭区域 D 任意分割成 n 个小区域 $\Delta D_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，且以 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小区域的面积.

（2）近似：分别以 $\Delta D_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的边界为准线，作母线平行于 Z 轴的柱面，得 n 个小曲顶柱体，在 ΔD_i 中任取一点 (ξ_i,η_i)，以 $f(\xi_i,\eta_i)$ 近似代替该小曲顶柱体的高，则其体积近似于 $\Delta V_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

（3）求和：将 n 个小曲顶柱体的体积相加，可得到整个曲顶柱体体积 V 的近似值，即

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i .$$

（4）取极限：当分割越来越细，即 $n \to \infty$ 时，n 个 ΔD_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 的直径中最大值 λ 趋于零，和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 的极限就是所求曲顶柱体的体积，即 $V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

在这个例子中，我们采取了与计算曲边梯形面积相类似的方法——分割、近似、求和、取极限，许多实际问题的解决都可以化归为这类极限，抽取它的实际意义而一般性研究这类极限，就得到了所谓二重积分.

二、二重积分的概念

1. 二重积分的概念

定义 1.1　设 $f(x,y)$ 是定义在有界闭区域 D 上的有界函数，如果对 D 任意分割成 n 个小区域 $\Delta D_1,\Delta D_2,\cdots,\Delta D_n$，在小区域 ΔD_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 上任意取一点 (ξ_i,η_i)，若极限 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 总存在（其中 $\Delta\sigma_i$ 表示为小区域 ΔD_i 的面积，λ_i 为小区域 ΔD_i 的直径，而 $\lambda=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda_i$），且与 D 的分割无关，与 (ξ_i,η_i) 的选取无关，则称这个极限值为 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分，记为 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$．这时称 $f(x,y)$ 在 D 上可积．其中 $f(x,y)$ 称为被积函数，D 称为积分区域，$\mathrm{d}\sigma$ 称为面积元素，$f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 称为被积表达式，x,y 称为积分变量.

在直角坐标系下，面积元素 $\mathrm{d}\sigma$ 表示成 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，这时二重积分记作 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

如果 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的连续函数，则 $f(x,y)$ 在 D 上一定可积.

2. 二重积分的几何意义

当 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的连续函数，且 $f(x,y)\geqslant 0$，则二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 表示以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶，侧面以 D 的边界曲线为准线，母线平行于 Z 轴的曲顶柱体的体积．若 $f(x,y)<0$，则 $-\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 表示曲顶柱体的体积.

当 $f(x,y)$ 在 D 上部分区域为正、其他区域上为负时，二重积分表示曲顶柱体体积的代数和．特别地，当 $f(x,y)\equiv 1$ 时，$\iint_D \mathrm{d}\sigma$ 是闭区域 D 的面积.

例 1　用二重积分的几何意义计算二重积分 $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$ 的值，其中 D：$x^2+y^2\leqslant 1$.

解　因为被积函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}\geqslant 0$，所以该二重积分表示以球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 为顶，区域 D: $x^2+y^2\leqslant 1$（见图 8-2）为底的曲顶柱体（上半球体）的体积，于是

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi\cdot 1^3}{3}=\frac{2}{3}\pi.$$

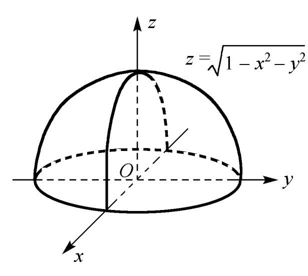


图 8-2

三、二重积分的性质

性质 1　$\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$　（k 为常数）.

性质 2　$\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

性质 3　$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$. 其中 $D = D_1 \cup D_2$，除公共边界外，D_1 与 D_2 不重叠.

性质 4　若 $f(x,y) \leqslant g(x,y)$，$(x,y)\in D$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

性质 5　若 $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$，$(x,y)\in D$，则 $mS \leqslant \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant MS$，其中 S 为区域 D 的面积.

性质 6　$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$.

性质7（积分中值定理）　设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，S 为 D 的面积，则存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\cdot S$.

我们也把 $\dfrac{\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma}{S}$ 称为 $f(x,y)$ 在 D 上的积分平均值.

例 2　比较二重积分的大小 $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由直线 $x=1,\ y=1$ 及 $x+y=1$ 围成.

解　在区域 D 上，由于 $x+y\geqslant 1$，则 $(x+y)^2 \leqslant (x+y)^3$，于是 $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$，所以后者大.

习题 8.1

1. 利用二重积分的定义证明.

（1）$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = \sigma$，其中 σ 为 D 的面积.

（2）$\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，$k$ 为常数.

2. 估计下列二重积分的值.

（1）$\iint\limits_D (x+y+1)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是闭矩形 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2$.

（2）$\iint\limits_D \sin^2 x\sin^2 y\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是闭矩形 $0\leqslant x\leqslant \pi, 0\leqslant y\leqslant \pi$.

第二节　二重积分的计算

这一节讲解二重积分的计算法，实际上就是将二重积分化为两次定积分来计算.

一、直角坐标系下二重积分的计算

我们从二重积分的几何意义来说明 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 的计算方法，下面假定 $f(x,y)\geqslant 0$.

若 D 可表示为 $D=\{(x,y)|y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),a\leqslant x\leqslant b\}$，则称 D 为 X 型区域. 它的特点是穿过 D 内部平行于 y 轴的直线与 D 的边界的交点不多于两个（如图 8-3 所示）　.

根据二重积分的几何意义知，二重积分的值就等于以 D 为底、以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积. 我们利用定积分中关于“截面面积已知的立体的体积计算”的方法来计算曲顶柱体的体积.

首先在区间 $[a,b]$ 中任取一点 x_0，过点 x_0 作平行于 yOz 面的平面 $x=x_0$，截曲顶柱体得一截面（如图 8-4 所示）.

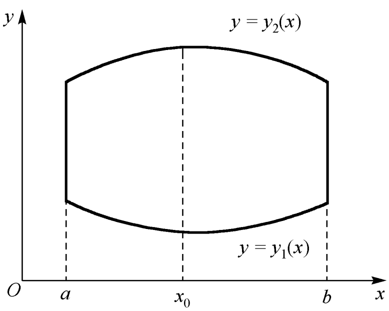


图 8-3

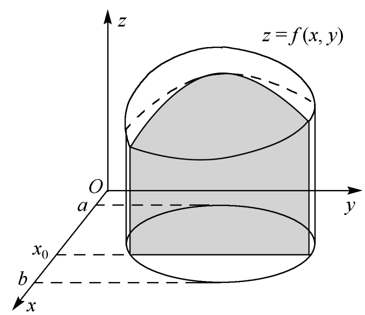


图 8-4

此截面是一个曲边梯形，其顶是曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $x=x_0$ 的交线，底是平行于 y 轴的直线段 $[y_1(x_0),y_2(x_0)]$. 由定积分的应用知截面面积为 $A(x_0)=\int_{y_1(x_0)}^{y_2(x_0)}f(x_0,y)\mathrm{d}y$. 一般地，过 $[a,b]$ 内任意一点 x 处的截面面积为 $A(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$. 因此，曲面柱体的体积为 $V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$.

于是有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \tag{2.1}$$

虽然这是在 $f(x,y)\geqslant 0$ 时得出的，但是对于 $f(x,y)\leqslant 0$ 也是成立的.

式（2.1）的右端是一个先对 y 后对 x 的二次积分，也就是说先把 x 看作常数，$f(x,y)$ 就成为了 y 的一元函数，并对 y 从 $y_1(x)$ 到 $y_2(x)$ 积分，然后把算得的结果对 x 从 a 到 b 积分. 常常把这种先对 y 后对 x 的二次积分记作 $\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$，从而（2.1）式可以写成

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \tag{2.2}$$

若积分区域 D 可以表示为 $D=\{(x,y)|x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y),c\leqslant y\leqslant d\}$，称 D 为 Y 型区域（如图 8-5 所示）.

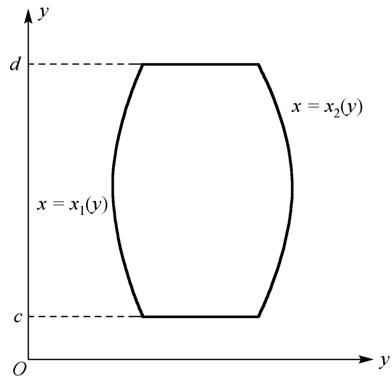


图 8-5

它的特点是穿过 D 内部平行于 x 轴的直线与 D 的边界的交点不多于两个. 类似地，计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 时可以写成先对 x 后对 y 的积分

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \tag{2.3}$$

二重积分化为二次积分时，根据积分区域 D 来确定积分限，通常先画出 D 的图形，根据图形来确定用（2.2）式还是（2.3）式. 下面举例说明.

例 1　计算二重积分 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 D 由直线 $x+y=1$，$x=0$ 及 $y=0$ 围成.

解　$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} x\mathrm{d}y = \int_0^1 (x-x^2)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$.

例 2　计算二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 D 由直线 $y=x, y=2x$ 及 $y=\pi$ 围成.

解　$\iint\limits_D \dfrac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \mathrm{d}y \int_{\frac{y}{2}}^{y} \dfrac{\sin y}{y}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin y\mathrm{d}y = -\dfrac{1}{2}\cos y\Big|_0^{\pi} = 1$.

在使用（2.2）式或（2.3）式时，穿过闭区域 D 内部且平行于 y 轴或 x 轴的直线与 D 的边界交点不多于两个. 如果区域 D 不具备这个条件，可以将 D 分为几个小区域，使得在每个小区域上具备这样的条件，所求的二重积分就等于在各个小区域上的积分和.

二、利用极坐标计算二重积分

在二重积分的计算中，有些二重积分的积分区域用极坐标表示比较简便，或被积函数用极坐标变量 ρ,θ 表示比较方便. 下面探讨这方面的问题.

假设函数 $z=f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续. 由二重积分定义知道，二重积分的值与积分区域 D 分法无关，所以用以极点 O 为中心的一组同心圆和从极点 O 出发的一族射线，将积分区域 D 分割成 n 个小区域 （如图 8-6 所示） .

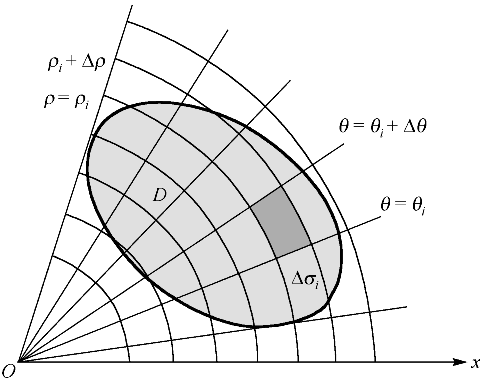


图 8-6

图中阴影部分所示小区域的面积近似于边长为 $\rho\mathrm{d}\theta$ 和 $\mathrm{d}\rho$ 的小矩形面积，所以在极坐标系中的面积元素可记为 $\mathrm{d}\sigma=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$.

由直角坐标和极坐标的关系 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，得出二重积分的极坐标形式

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta.$$

下面把二重积分的极坐标形式化为累次积分. 根据区域 D 与极点 O 的位置关系不同，分以下三种情况考虑：

（1）极点 O 在区域 D 的外部（见图 8-7）.

积分区域表示为 $D:\begin{cases}\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\\ \rho_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\theta)\end{cases}$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

（2）极点 O 在区域 D 的边界上（见图 8-8）.

积分区域可表示为 $D:\begin{cases}\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\\ 0\leqslant\rho\leqslant\rho(\theta)\end{cases}$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_0^{\rho(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

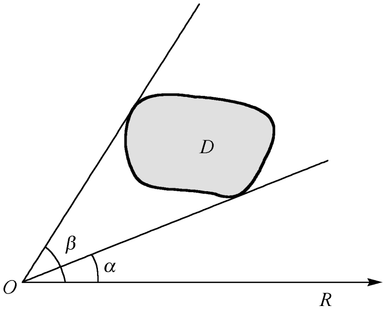


图 8-7

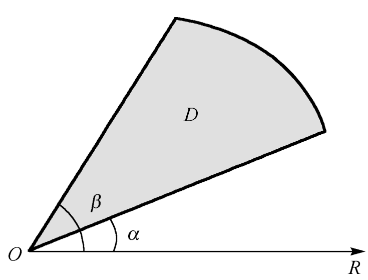


图 8-8

（3）极点 O 在区域 D 的内部（见图 8-9）．

积分区域可表示为 $D:\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\0\leqslant\rho\leqslant\rho(\theta)\end{cases}$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\rho(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$．

例 3　计算二重积分 $\iint\limits_D\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}$，其中积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$．

解　$\iint\limits_D\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\dfrac{\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho=2\pi\cdot\dfrac{1}{2}\ln(1+\rho^2)\Big|_0^1=\pi\ln 2$．

例 4　计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant y\}$．

解　$\iint\limits_D\sqrt{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y==\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}\rho^{3/2}\sqrt{\sin\theta}\mathrm{d}\rho=\dfrac{2}{5}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=\dfrac{2}{5}\cdot 2\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{15}$．

例 5　计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是圆域 $x^2+y^2\leqslant x$（见图 8-10）．

解　$\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}\rho\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\rho$

$$=-\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-|\sin^3\theta|)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-|\sin^3\theta|)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}.$$

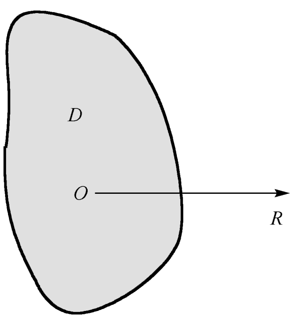


图 8-9

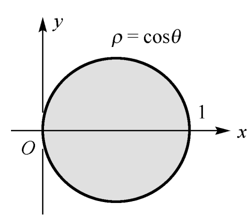


图 8-10

习题 8.2

1. 利用直角坐标计算下列二重积分.

（1）$\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,\|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$．

（2）$\iint\limits_D(3x+2y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 x 轴、y 轴与直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域.

（3）$\iint\limits_D (x^2+y^2-x)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $y=2, y=x$ 及 $y=2x$ 所围成的闭区域.

（4）$\iint\limits_D (x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是闭区域：$0\leqslant y\leqslant \sin x, 0\leqslant x\leqslant \pi$.

2. 改变下列积分的次序.

（1）$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x$；　　（2）$\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$；

（3）$\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$；　　（4）$\int_1^e \mathrm{d}x\int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y$.

3. 利用极坐标计算下列二重积分.

（1）$\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D: x^2+y^2\leqslant 4$.

（2）$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D: x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$.

第三节　二重积分的应用

在第二节的学习中我们知道利用二重积分的几何意义可以求曲顶柱体的体积. 在这一节我们进一步讨论二重积分在其他方面的一些应用.

一、曲面的面积

设 D 为可求面积的平面有界区域，函数 $z=f(x,y)$ 在 D 上具有连续的一阶偏导数 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$. 下面讨论由方程 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$ 所确定的曲面 S 的面积.

对区域 D 作分割 T，把 D 分成 n 个小区域 σ_i（$i=1,2,\cdots,n$）. 这样相应的曲面 S 也被分成 n 个小曲面片 S_i（$i=1,2,\cdots,n$）. 在每个 S_i 上任取一点 M_i，作曲面在这一点的切平面 π_i，并在 π_i 上取出一小块 A_i，使得 A_i 与 S_i 在 xy 平面上的投影都是 σ_i，如图 8-11 所示.

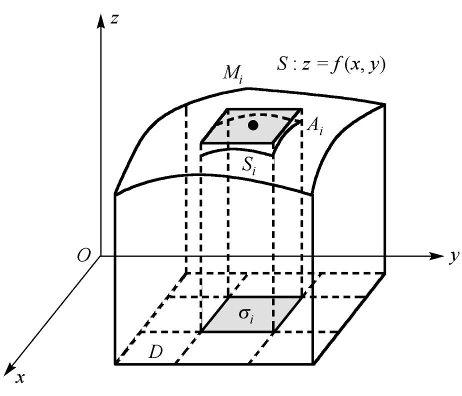


图 8-11

在点 M_i 附近，用切平面 A_i 代替小曲面片 S_i，从而当 $\lambda\to 0$（$\lambda=\max\{\sigma_i$ 的直径，$1\leqslant i\leqslant n\}$）时，有 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta S_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta A_i$，其中 S 表示为曲面 S 的面积，ΔS_i 表示为小曲面片 S_i 的面积，ΔA_i

表示为小切平面块 A_i 的面积. 所以当 $\lambda\to 0$ 时，可用和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta A_i$ 的极限作为 S 的面积.

由于切平面 π_i 的法向量就是曲面 S 在点 $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 处的法向量，记该法向量与 Z 轴的夹角为 γ_i，则 $|\cos\gamma_i|=\dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2(\xi_i,\eta_i)+f_y^2(\xi_i,\eta_i)}}$，所以 $\Delta A_i=\dfrac{\Delta\sigma_i}{|\cos\gamma_i|}=\sqrt{1+f_x^2(\xi_i,\eta_i)+f_y^2(\xi_i,\eta_i)}\Delta\sigma_i$.

和数 $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta A_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+f_x^2(\xi_i,\eta_i)+f_y^2(\xi_i,\eta_i)}\Delta\sigma_i$ 是连续函数 $\sqrt{1+f_x^2(\xi,\eta)+f_y^2(\xi,\eta)}$ 在有界闭区域 D 上的积分和. 当 $\lambda\to 0$ 时就得到

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f_x^2(\xi_i,\eta_i)+f_y^2(\xi_i,\eta_i)}\Delta\sigma_i=\iint_D\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

这就是曲面面积的计算公式.

例 1　求平面 $2x-2y+z=0$ 被圆柱面 $x^2+y^2=4$ 截下的有限部分的面积（如图 8-12）.

解　Σ: $z=-2x+2y$，Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy}: $x^2+y^2\leqslant 4$.

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+(-2)^2+2^2}=3 ,$$

所以 $A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\cdot 4\pi=12\pi$.

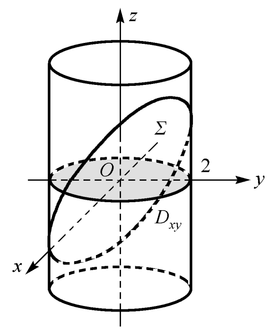


图 8-12

二、质心

设 D 是密度函数为 $\rho(x,y)$ 的平面薄板，$\rho(x,y)$ 在 D 上连续，求平面薄板的质心. 先对 D 作分割 T，在属于分割 T 的每一小块 D_i 上任取一点 (ξ_i,η_i)，每一小块 D_i 的质量可以用 $\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta D_i$ 近似代替. 若把每一小块看作质量集中在 (ξ_i,η_i) 的质点时，整个平面薄板就可用这 n 个质点的质点系来近似代替. 由于质点系的质心坐标公式为

$$\overline{x}_i=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta D_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta D_i},\quad \overline{y}_i=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta D_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta D_i}.$$

当 $\lambda\to 0$ 时，λ 为 n 个小块的直径最大者，就得到平面薄板的质心公式：

$$\overline{x}=\frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma},\quad \overline{y}=\frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}.$$

当平面薄板 D 的密度均匀时，即 ρ 是常数时，则有 $\overline{x}=\dfrac{1}{\Delta D}\iint\limits_D x\mathrm{d}\sigma,\overline{y}=\dfrac{1}{\Delta D}\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma$，这里 ΔD 为平面薄板 D 的面积.

例 2　面密度为 $\mu=1-x$ 的三角形薄板：$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x+y\leqslant 1$．如图 8-13 所示.

解　$$M=\iint\limits_D (1-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}-\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3},$$

$$M_y=\iint\limits_D (1-x)x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x(1-x)\mathrm{d}y=\int_0^1 x(1-x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12},$$

$$M_x=\iint\limits_D (1-x)y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x)y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^3\mathrm{d}x=-\frac{1}{8}(1-x)^4\Big|_0^1=\frac{1}{8},$$

于是 $\overline{x}=\dfrac{M_y}{M}=\dfrac{1/12}{1/3}=\dfrac{1}{4}$，　$\overline{y}=\dfrac{M_x}{M}=\dfrac{1/8}{1/3}=\dfrac{3}{8}$，

所以质心位于 $\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{8}\right)$.

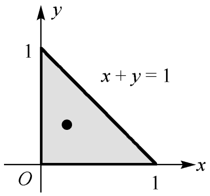


图 8-13

习题 8.3

1. 求球面 $x^2+y^2+z^2=16$ 夹在两平面 $z=1$，$z=2$ 之间的部分的面积.

2. 求面 $Z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的面积.

3. 求密度为 μ 的均匀薄板占有区域 $2ax\leqslant x^2+y^2\leqslant 4ax$（$a>0$）的质心.

4. 面薄片所占的闭区域 D 由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x$ 所围成，它在点 (x,y) 处的面密度为 $\mu(x,y)=x^2y$．求此薄片的质心.

第四节　三 重 积 分

把二重积分的概念推广到三维空间中就得到了三重积分．本节主要讨论三重积分的概念、性质和计算.

一、三重积分的概念

定义 4.1　设 $f(x,y,z)$ 是定义在空间有界闭区域 Ω 上的有界函数（如图 8-14 所示），将 Ω 任意分割为 n 个小区域 $\Delta V_1,\Delta V_2,\cdots,\Delta V_n$，且在小区域 ΔV_k $(k=1,2,\cdots,n)$ 上任意取一点 (ξ_k,η_k,ζ_k)，都有 $\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta V_k$ 存在（其中 ΔV_k 表示为小区域 ΔV_k 的体积，d_k 为小区域 ΔV_k 的直径，而 $d=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}d_k$），则称这个极限值为 $f(x,y,z)$ 在空间区域 Ω 上的三重积分，记作 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}V$．这时就称函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上是可积的，其中 $\mathrm{d}V$ 称为体积元素．在直角坐标系中，体积元素 $\mathrm{d}V$ 也记作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，三重积分可表示成 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

若 $f(x,y,z)$ 为 Ω 上的连续函数时，则它一定是可积的.

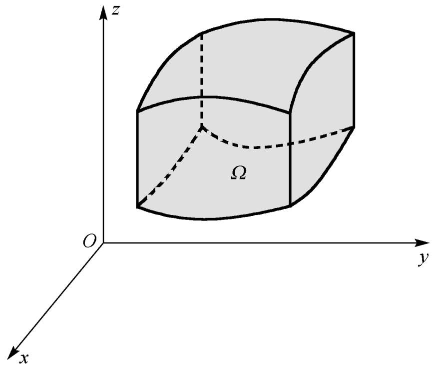


图 8-14

二、三重积分的性质

三重积分的性质与二重积分类似.

性质 1 $\iiint\limits_{\Omega} kf(x,y,z)\mathrm{d}V = k\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$，$k$ 为常数.

性质 2 $\iiint\limits_{\Omega}[f(x,y,z)\pm g(x,y,z)]\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V \pm \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)\mathrm{d}V$.

性质 3 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}V + \iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)\mathrm{d}V$.

其中，$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$，除公共边界外，$\Omega_1$ 与 Ω_2 不重叠.

性质 4 若 $f(x,y,z) \leqslant g(x,y,z)$，$(x,y,z) \in \Omega$,，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V \leqslant \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)\mathrm{d}V .$$

性质 5 若 $m \leqslant f(x,y,z) \leqslant M$, $(x,y,z) \in \Omega$，则

$$mV \leqslant \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V \leqslant MV .$$

其中，V 为区域 Ω 的体积

性质 6 $\left|\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V\right| \leqslant \iiint\limits_{\Omega} |f(x,y,z)|\,\mathrm{d}V$.

性质 7（积分中值定理） 设 $f(x,y,z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上连续，V 为 Ω 的体积，则存在 $(\xi,\eta,\zeta) \in \Omega$，使得

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = f(\xi,\eta,\zeta)V .$$

我们也把 $\dfrac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 称为 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的积分平均值.

三、三重积分的计算法

三重积分可化为三次积分来计算. 下面给出三重积分化为三次积分的方法.

1. 直角坐标系下三重积分化为累次积分

假设平行于 z 轴且穿过闭区域 Ω 内部的直线与 Ω 的边界曲面 S 相交不多于两点（如图 8-15 所示）.

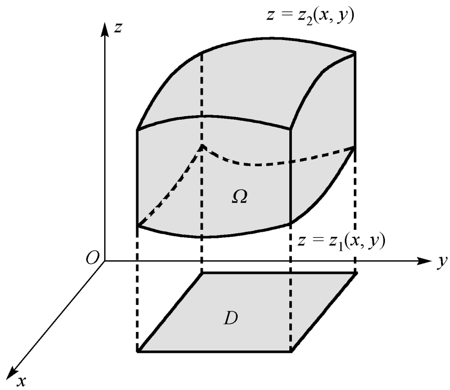


图 8-15

闭区域 Ω 在 xOy 面上的投影区域记为 D_{xy}. 闭区域 Ω 可以表示为

$$\Omega = \{(x,y) \big| z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y), (x,y) \in D_{xy}\},$$

先把 x,y 看作常数，这时 $f(x,y,z)$ 只看作 z 的函数，在区间 $[z_1(x,y), z_2(x,y)]$ 上对 z 积分，积分的结果就是 x,y 的函数，记为 $G(x,y)$，即

$$G(x,y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

然后计算 $G(x,y)$ 在投影区域 D_{xy} 上的二重积分 $\iint\limits_{D} G(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}\sigma$. 所求的三重积分可表示成

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iint\limits_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}\sigma.$$

如果投影区域 D_{xy} 可表示为 $D_{xy} = \{(x,y) \big| y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), a \leqslant x \leqslant b\}$，从而三重积分就化为了三次积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$.

如果用平行于 x 轴或 y 轴且穿过闭区域 Ω 内部的直线与 Ω 的边界曲面 S 的交点不多于两个，那么把 Ω 投影到 yOz 面或 zOx 面上，三重积分可化为其他顺序的三次积分.

例 1　计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}v$，其中 Ω 由平面 $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$ 及 $z=x$ 围成（如图 8-16 所示）.

解　$\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}v = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^x xyz\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 x^3 y\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_0^1 x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{16}$.

例 2　计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}v}{z^2}$，其中 Ω 为闭区域 $z \geqslant x^2 + y^2$，$1 \leqslant z \leqslant 2$（如图 8-17 所示）.

解　$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}v}{z^2}=\int_1^2\left[\iint\limits_{D_z}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z^2}\right]\mathrm{d}z=\pi\int_1^2\frac{\mathrm{d}z}{z}=\pi\ln z\Big|_1^2=\pi\ln 2\,.$$

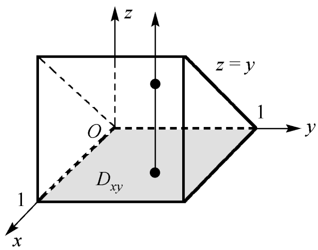


图 8-16

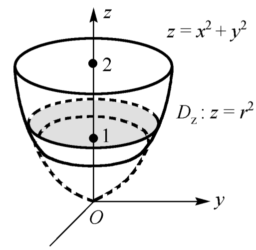


图 8-17

例 3　计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}x^2y\mathrm{d}v$，其中 Ω 由平面 $x+y+z=1$ 及三个坐标面围成（见图 8-18）.

解　$$\iiint\limits_{\Omega}x^2y\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}x^2y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x^2y(1-x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1x^2\left[(1-x)\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_0^{1-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\int_0^{1-x}x^2(1-x)^3\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^{1-x}(x^2-3x^3+3x^4-x^5)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{360}\,.$$

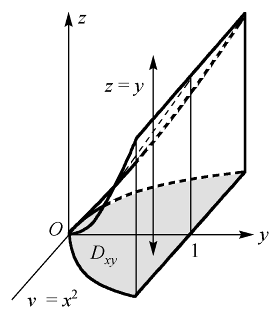


图 8-18

2．柱面坐标系下三重积分的计算

设 $P\in R^3$， P 的直角坐标为 (x,y,z)， P 在 xOy 面上的投影为 $P_0(x,y,0)$，P_0 表示成极坐标 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$（如图 8-19 所示），称 (ρ,θ,z) 为点 P 的柱面坐标. 柱面坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\\ z=z.\end{cases}$$

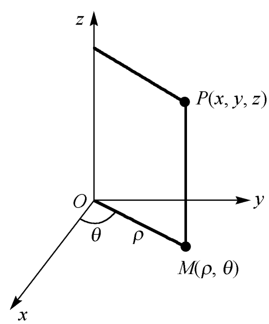


图 8-19

平面区域 D 在极坐标系下可表示为 $\rho_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 则

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}\mathrm{d}\rho\int_{z_1(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)}^{z_2(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)}\rho f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\mathrm{d}z \tag{4.1}$$

这样就把三重积分化为柱面坐标系下的三次积分.

例 4　计算 $\iiint\limits_{\Omega}x^2yz\mathrm{d}v$，其中 Ω 是曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=3$ 所围成的闭区域.

解 Ω 在平面 xOy 中的投影是由空间曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 3 \end{cases}$ 在平面 xOy 中的投影所围的闭圆盘 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 3\}$.

在柱面坐标下，投影区域为

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{3}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}.$$

闭区域 Ω 可表示为

$$\Omega = \{(\rho, \theta, z) | \rho^2 \leqslant z \leqslant 3, 0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{3}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega x^2 yz\mathrm{d}v &= \iiint_\Omega (\rho\cos\theta)^2 \cdot \rho\sin\theta \cdot z \cdot \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{3}} \mathrm{d}\rho \int_{r^2}^3 \rho^4 \cos^2\theta \cdot \sin\theta \cdot z\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin\theta\mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho^4 \mathrm{d}\rho \int_{r^2}^3 z\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin\theta\mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho^4 \left(\frac{9}{2} - \frac{\rho^4}{2}\right)\mathrm{d}\rho \\
&= \left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\bigg|_0^{2\pi} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \rho^4 \left(\frac{9}{2} - \frac{\rho^4}{2}\right)\mathrm{d}\rho \\
&= 0.
\end{aligned}$$

习题 8.4

1. 将三重积分 $\iiint_\Omega f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 在直角坐标系下化为累次积分，其中积分区域 Ω 分别是:

（1）由平面 $x = 0$， $y = 0$， $z = 1$ 及 $z = x + y$ 围成.

（2）由双曲抛物面 $z = xy$ 及平面 $x + y = 1$， $z = 0$ 围成的立体.

2. 在直角坐标系下计算下列三重积分.

（1）$\iiint_\Omega xy^2 z^3 \mathrm{d}V$，其中 Ω 由平面 $y = x, x = 1, z = 0$ 及曲面 $z = xy$ 围成.

（2）$\iiint_\Omega \dfrac{\mathrm{d}V}{(1 + x + y + z)^3}$，其中 Ω 是由平面 $x = 0, y = 0, z = 0$ 及 $x + y + z = 1$ 所围成的四面体.

（3）$\iiint_\Omega xz\mathrm{d}V$，其中 Ω 由平面 $z = 0, z = y, y = 1$ 及抛物柱面 $y = x^2$ 围成.

3. 将下列三重积分在柱面坐标系下化为累次积分.

（1）$\iiint_\Omega f(x, y, z)\mathrm{d}V$，其中 Ω 由不等式 $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 3$ 确定.

（2）$\iiint_\Omega f(x, y, z)\mathrm{d}V$，其中 Ω 由圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$，及两平面 $z = 0$， $z = 1$ 围成.

（3）$\iiint_\Omega f(\sqrt{x^2 + y^2})\mathrm{d}V$，其中 Ω 由不等式 $0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2 - y^2$ 确定.

4. 利用柱面坐标系计算下列三重积分.

（1）$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$，其中 Ω 由半球面 $z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$ 及平面 $z=1$ 围成.

（2）$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V$，其中 Ω 为闭区域 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{2-x^2-y^2}$.

（3）$\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}V$，其中 Ω 为闭区域 $x^2+y^2\leqslant 2y$， $0\leqslant z\leqslant 1$.

第五节　曲 线 积 分

定积分的概念主要是一元函数定义在有限的闭区间上，如果把这个条件推广到二元函数定义在平面曲线上，就会得到曲线积分的概念.

一、第一型曲线积分

1. 第一型曲线积分的概念

例 1　设曲线 L 的长度为 l，线密度为 μ（ μ 为常数），则曲线 L 的质量为 $M=\mu l$. 如果曲线 L 的线密度 $\mu=\mu(x,y),(x,y)\in L$，那么如何求曲线 L 的质量（见图 8-20）.

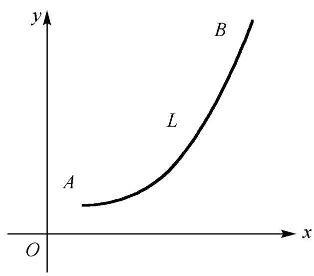


图 8-20

我们采用和求曲边梯形一样的思路，先把曲线 L 任意分割成 n 个小弧段 Δl_i （ $i=1,2,\cdots,n$ ），用 Δl_i 表示第 i 个小弧段的长度，在每个小弧段 Δl_i 上任取一点 (ξ_i,η_i)， 则第 i 个小弧段的质量 $\Delta m_i\approx\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i$， 曲线 L 的总质量近似于 $M=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta m_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i$ ， 令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta l_i\}$， 则

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i .$$

对于这个问题，去掉其实际意义，保留数学的公式，得到第一型曲线积分的定义.

定义 5.1　设 L 为 xOy 平面上的一条光滑（或分段光滑）的曲线弧段，二元函数 $f(x,y)$ 定义在曲线 L 上，将曲线 L 任意地分为 n 个小弧段 Δl_i （ $i=1,2,\cdots,n$ ），在每个小弧段 Δl_i 上任取一点 (ξ_i,η_i)，则和为 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i$，如果 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i$ （ $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\lambda_i)$ ）存在，则称此极限值为函数 $f(x,y)$ 在曲线 L 上的第一型的曲线积分（或称对弧长的曲线积分），记作 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}l$. 即

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}l=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i .$$

其中曲线 L 称为积分路径， $f(x,y)$ 称为被积函数， $\mathrm{d}l$ 称为弧长元素.

当 $f(x,y)$ 在光滑曲线 L 上连续时，第一型的曲线积分总是存在的. 显然 $\int_L\mathrm{d}l=l$ （ l 为曲线段的弧长）.

2. 第一型曲线积分的性质

性质 1 设积分路径 L 由两段光滑曲线 L_1 和 L_2 所组成，则有 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}l = \int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}l + \int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}l$.

性质 2 对于任意的常数 k_1, k_2，有

$$\int_L [k_1 f(x,y) + k_2 g(x,y)]\mathrm{d}l = k_1\int_L f(x,y)\mathrm{d}l + k_2\int_L g(x,y)\mathrm{d}l .$$

性质 3 若改变积分路径 L 的方向，则第一型的曲线积分值不变，即

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}l = \int_{L^-} f(x,y)\mathrm{d}l ,$$

其中 L^- 表示与 L 指向相反地同一条曲线弧.

3. 第一型曲线积分计算

设积分曲线弧段 L 由参数方程 $\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 给出，其中函数 $\phi(t), \psi(t)$ 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数，且 $\phi'(t), \psi'(t)$ 不同时为零，$f(x,y)$ 在 L 上连续，则第一型曲线积分可化为定积分来算：

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}l = \int_\alpha^\beta f[\phi(t),\psi(t)]\sqrt{[\phi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t .$$

如果曲线弧段 L 是由方程 $y=y(x)$（$a \leqslant x \leqslant b$）给出，$y'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则我们就把曲线弧段 L 看成以 x 为参数的参数方程 $\begin{cases} x=x \\ y=y(x) \end{cases}$，第一型曲线积分的计算公式为

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}l = \int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x .$$

同理如果曲线弧段 L 是由方程 $x=x(y)$（$c \leqslant y \leqslant d$）给出，$x'(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}l = \int_c^d f[x(y),y]\sqrt{1+[x'(y)]^2}\,\mathrm{d}y .$$

例 2 $\int_L x\mathrm{d}l$，抛物线 $y=1-x^2$ 上从(1, 0)到(0, 1)的一段（见图 8-21）.

解 L: $y=1-x^2$（$0 \leqslant x \leqslant 1$），$\mathrm{d}l=\sqrt{1+(-2x)^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$，所以

$$\int_L x\mathrm{d}l = \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}(1+4x^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5}-1}{12} .$$

例 3 $\oint_L \frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{16x^2+y^2}}$，其中 L 为椭圆 $x=\cos t,\ y=2\sin t$ 的一周（见图 8-22）.

解 L: $x=\cos t,\ y=2\sin t$（$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$），$\mathrm{d}l=\sqrt{\sin^2 t+4\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$，

$$\oint_L \frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{16x^2+y^2}} = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\sin^2 t+4\cos^2 t}}{\sqrt{16\cos^2 t+4\sin^2 t}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = \pi .$$

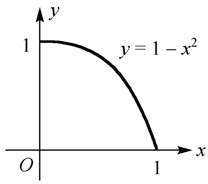


图 8-21

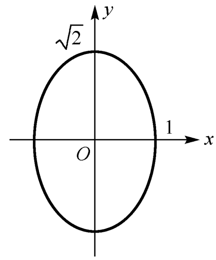


图 8-22

例 4　$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}l$，其中 L 圆周 $x^2+y^2=1$，直线 $y=x$ 及 x 轴围成的第一象限内扇形的整个边界（如图 8-23 所示）.

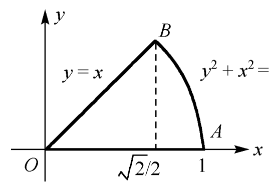


图 8-23

解　设 $L=\overline{OA}+\overset{\frown}{AB}+\overline{BO}$，其中

$\overline{OA}$：$y=0$（$0\leqslant x\leqslant 1$），$\mathrm{d}s=\sqrt{1+0^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}x$；

$\overset{\frown}{AB}$：$x=\cos t,\ y=\sin t$（$0\leqslant t\leqslant \pi/4$），

$\mathrm{d}l=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\mathrm{d}t=\mathrm{d}t$；

$\overline{BO}$：$y=x$（$0\leqslant x\leqslant \sqrt{2}/2$），$\mathrm{d}s=\sqrt{1+1^2}\mathrm{d}x=\sqrt{2}\mathrm{d}x$. 所以

$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}l=\int_{\overline{OA}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}l+\int_{\overset{\frown}{AB}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}l+\int_{\overline{BO}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}l$$

$$=\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/4}1\cdot\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{2}/2}\sqrt{2}x\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+x^2\Big|_0^{\sqrt{2}/2}=1+\frac{\pi}{4}.$$

二、第二型曲线积分

1. 第二型的曲线积分的概念

例 5　设在 xOy 平面上一质点在力 $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ 的作用下沿着光滑曲线 L 由点 A 移动到点 B（如图 8-24 所示），其中 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 L 上连续，求力 $\vec{F}$ 所做的功 W.

如果力 $\vec{F}$ 是恒力，且质点沿直线从 A 移动到 B，那么恒力 $\vec{F}$ 所做的功等于向量 $\vec{F}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的数量积，即 $W=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$. 现在 $\vec{F}$ 是变力，我们可以采取与求曲边梯形面积类似的方法.

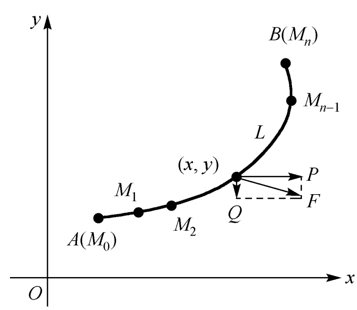


图 8-24

在 L 上自 A 向 B 依次插入分点 $M_0=A,M_1,M_2,\cdots,M_{n-1},M_n=B$，把 L 分为 n 个小弧段，设分点 M_i 的坐标为 $(x_i,y_i)(i=0,1,\cdots,n)$. 对于第 i 个有向弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 可以近似地用有向线段 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ 来代替. 令 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$，则有向线段 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ 的坐标为 $(\Delta x_i,\Delta y_i)$，在有向弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上任意取一点 (ξ_i,η_i)，用 $\vec{F}(\xi_i,\eta_i)$ 来代替 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上任一点处的力，于是变力 $\vec{F}$ 沿有向弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 所做的功为

$$\Delta W_i\approx\vec{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}.$$

变力 $\vec{F}$ 沿有向弧 L 所做的功

$$W=\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i\approx\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F(\xi_i,\eta_i)}\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=\sum_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\right],$$

两边取极限 $W=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\right]$，$\lambda$ 为 n 个小弧段的弧长最大值.

由上述问题引入第二型曲线积分的概念.

定义 5.2　设 L 是平面 xOy 内的以 A 为起点，B 为终点的分段光滑的有向曲线弧，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 L 上有界. 在 L 上沿 L 的方向顺次任意插入 $n-1$ 个分点：$M_1,M_2,\cdots,M_{n-1}$，($A=M_0,B=M_n$)，把 L 分为 n 个有向光滑小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$，设分点 M_i 的坐标为 (x_i,y_i)，记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$（$i=0,1,2,\cdots,n$）. $\Delta x_i,\Delta y_i$ 分别为小有向曲线弧 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 在 x 轴和 y 轴上的投影，点 (ξ_i,η_i) 为 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上任意取定的点，作和 $\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$ 与 $\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$，令 λ 为所有小弧段中弧长的最大者. 若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$ 总存在，则称该极限为函数 $P(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上对坐标 x 曲线积分，记作 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x$，即

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i .$$

类似地，如果极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$ 总存在，则称该极限为函数 $Q(x,y)$ 在有向弧 L 上对坐标 y 的曲线积分，记作 $\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$，即

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i .$$

对坐标的曲线积分通常也称为第二型曲线积分.

我们在以后经常用的第二型曲线积分的形式为 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$，并且

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y .$$

如果 L 为封闭曲线，通常记作 $\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$.

2. 第二型曲线积分的性质

性质 1　如果有向曲线积分 L 的方向改变为 L^-（与 L 的方向相反），则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\int_{L^-}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

性质 2　若积分路径 L 由 L_1 和 L_2 首尾依次连接而成，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{L_1}P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{L_2}P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

3. 第二型曲线积分的计算

第二型曲线积分的计算和第一型曲线积分一样，也是化为定积分来算.

设 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 定义在有向曲线 L 上的连续函数，L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，当参数 t 单调地由 α 变到 β 时，对应的点 $M(x,y)$ 从 L 的起点移动到终点，$\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数，并且 $\phi'(t)$ 和 $\psi'(t)$ 不同时为零，则计算公式如下：

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t\,.$$

注意：在上面这个公式里要注意下限 α 对应于 L 的起点，上限 β 对应 L 的终点，α 不一定小于 β.

如果曲线方程是由 $y=\psi(x),a\leqslant x\leqslant b$，可以看成以 x 为参数的参数方程，公式就成为

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b\{P[x,\psi(x)]+Q[x,\psi(x)]\psi'(x)\}\,\mathrm{d}x\,.$$

类似地，如果曲线方程是由 $x=\phi(y),c\leqslant y\leqslant d$，则有

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d\{P[\varphi(y),y]\varphi'(y)+Q[\varphi(y),y]\}\,\mathrm{d}y\,.$$

例 6 $\int_L (x+y)^2\mathrm{d}x$，其中 L 是直线 $y=2x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段（见图 8-25）.

解 以 x 作参数，L: $y=2x$（起点 $x=0$，终点 $x=2$），则

$$\int_L (x+y)^2\mathrm{d}x=\int_0^2(x+2x)^2\mathrm{d}x=9\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=24\,.$$

例 7 $\int_L x^2y\mathrm{d}x+(1+x^2-y)\mathrm{d}y$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(1,\ 1)$ 到点 $(-1,\ 1)$ 的一段（见图 8-26）.

解 以 x 作参数，L: $y=x^2$（起点 $x=1$，终点 $x=-1$），则

$$\begin{aligned}\int_L x^2y\mathrm{d}x+(1+x^2-y)\mathrm{d}y&=\int_1^{-1}[x^2x^2+(1+x^2-x^2)2x]\mathrm{d}x\\&=\int_1^{-1}(x^4+2x)\mathrm{d}x=-2\int_{-1}^0 x^4\mathrm{d}x=-\frac{2}{5}\,.\end{aligned}$$

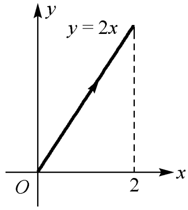


图 8-25

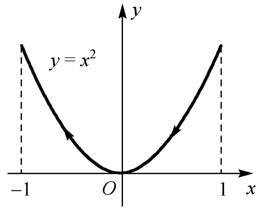


图 8-26

习题 8.5

1.（1）$\int_L 2x^2y\mathrm{d}l$，其中 L 是折线 $y=|x|$ 上对应 $0\leqslant y\leqslant 1$ 的一段.

（2）$\int_L xy\mathrm{d}s$，其中 L 是位于第一象限的圆 $y=\sqrt{2x-x^2}$.

（3）$\int_L (x+y)\mathrm{d}l$，L：由 $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ 为顶点的三角形.

2.（1）$\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x$，$L$ 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧.

（2）$\int_L y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，$L$ 是 $x=R\cos\theta, y=R\sin\theta$ 上由 $\theta=0$ 到 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 的一段弧.

第六节　格 林 公 式

一、格林公式

先来介绍单连通区域的概念，如果区域 D 内任一条封闭曲线所围成的区域只含有 D 中的点，则称 D 为单连通区域. 简单地说，单连通区域是没有洞的区域，否则称为复连通区域.

如果平面区域 D 的边界 L 是由一条或几条光滑曲线所组成，边界曲线的正方向规定为：当观察者沿着边界行走时区域 D 总在他的左边. 与上述方向相反的方向称为负方向，记为 $-L$.

定理 6.1　若函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，且有连续的一阶偏导数，则有

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \tag{6.1}$$

这里 L 为区域 D 的边界曲线，分段光滑，并取正方向.

公式（6.1）称为格林公式.

证　根据区域 D 的不同形状，　这里分三种情形作出证明.

（1）若 D 既是 X 型又是 Y 型区域（见图 8-28），则 D 可表为 $\phi_1(x)\leqslant y\leqslant\phi_2(x), a\leqslant x\leqslant b$，又可表为 $\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y), \alpha\leqslant y\leqslant\beta$. 这里 $y=\phi_1(x)$ 和 $y=\phi_2(x)$ 分别为曲线 $\overset{\frown}{ACB}$ 和 $\overset{\frown}{AEB}$ 的方程，而 $x=\psi_1(y)$ 和 $x=\psi_2(y)$ 则分别是曲线 $\overset{\frown}{CAE}$ 和 $\overset{\frown}{CBE}$ 的方程.

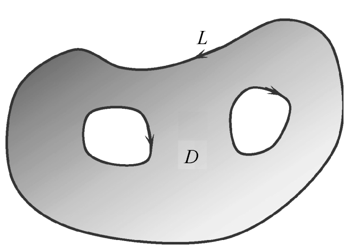


图 8-27

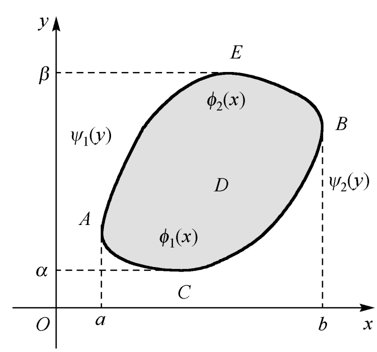


图 8-28

于是

$$\iint_d \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_\alpha^\beta Q(\psi_2(y),y)\mathrm{d}y-\int_\alpha^\beta Q(\psi_1(y),y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overline{CBE}} Q(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\overline{CAE}} Q(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{\overline{CBE}} Q(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\overline{EAC}} Q(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\oint_L Q(x,y)\mathrm{d}y\,.$$

同理可以证得

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}\sigma=\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x\,.$$

将上面两个结果加起来得：

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\oint_L (P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)\,.$$

（2）若区域 D 是由一条分段光滑的闭曲线围成（如图 8-29），则可把 D 分成若干个（1）中的区域，再逐块运用（6.1）式，然后相加.

如图 8-29，区域 D 可以分为 D_1,D_2,D_3 . 所以

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$$
$$=\oint_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\oint_{L_2} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\oint_{L_3} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$
$$=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\,.$$

（3）若区域 D 由几条闭曲线所围成（如图 8-30 所示）.

这时可适当添加直线段 AB,CE ，把区域转化为（2）的情况来处理.

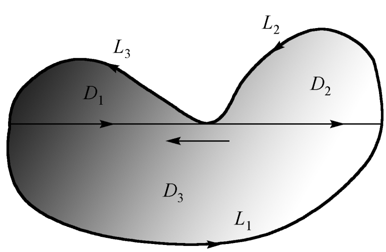


图 8-29

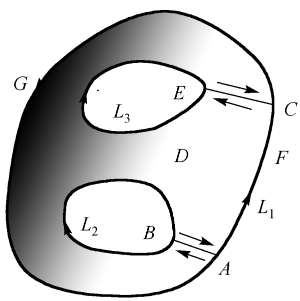


图 8-30

例 1　$\oint_L (x-2y)\mathrm{d}x+(3x+4y)\mathrm{d}y$ ，其中 L 是由折线 $x=|y|$ 与 $x=1$ 围成三角形区域的正向边界曲线.

解　满足格林公式的所有条件， $P=x-2y,\ Q=3x+4y$ ， $\dfrac{\partial P}{\partial p}=-2,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=3$ ，由格林公式，得

$$\oint_L (x-2y)\mathrm{d}x+(3x+4y)\mathrm{d}y=\iint_D [3-(-2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=5\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=5\,.$$

例 2　$\int_L y\mathrm{d}x+(\sqrt{y}+\sin x)\mathrm{d}y$，其中 L 是余弦曲线 $y=\cos x$ 上从点 $A(0,\ 1)$ 到点 $B(\pi/2,\ 0)$ 的一段有向弧.

解　曲线不封闭，为用格林公式，补有向直线 $\overrightarrow{BO}$：$y=0$，及 $\overrightarrow{OA}$：$x=0$，$P=y$，$Q=\sqrt{y}+\sin x$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\cos x$，则

$$\begin{aligned}
&\int_L y\mathrm{d}x+(\sqrt{y}+\sin x)\mathrm{d}y\\
&=(\oint_{L+\overline{BO}+\overline{OA}}+\int_{\overline{AO}}+\int_{\overline{OB}})y\mathrm{d}x+(\sqrt{y}+\sin x)\mathrm{d}y\\
&=-\iint_D(\cos x-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_1^0\sqrt{y}\mathrm{d}y+\int_0^{\pi/2}0\cdot\mathrm{d}x\\
&=-\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x\int_0^{\cos x}(\cos x-1)\mathrm{d}y-\frac{2}{3}\\
&=-\int_0^{\pi/2}(\cos x-1)\cos x\mathrm{d}x-\frac{2}{3}=-\frac{\pi}{4}+1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{4}\quad.
\end{aligned}$$

二、曲线积分与路径无关的条件

由第二型曲线积分的定义知积分值与曲线积分路径的方向有关，曲线的方向改变，积分值也会随之改变. 但是当被积函数满足一定的条件时第二型曲线积分会与积分路径无关.

定理 6.2　设函数 $P(x,y),Q(x,y)$，在单连通区域 D 内有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关的充分必要条件是 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y},(x,y)\in D$.

例 3　$\int_L y\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 的起点、终点分别为 $(0,\ 0)$、$(1,\ 3)$（见图 8-31）.

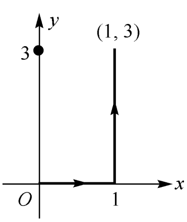


图 8-31

解　$P=y$，$Q=x+y^2$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1$，在整个坐标平面 xOy 内 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 且连续，所以在整个坐标平面 xOy 内积分 $\int_L y\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y$ 与路径无关，沿折线计算，则

$$\int_L y\mathrm{d}x+(x+y^2)y=\int_0^1 0\mathrm{d}x+\int_0^3(1+y^2)\mathrm{d}y=0+3+\frac{27}{3}=12.$$

习题 8.6

1. 利用格林公式计算下列曲线积分

（1）$\oint_L(\sin x+x^2y)\mathrm{d}x+(x^2\sin y-xy^2)\mathrm{d}y$，其中 L 是圆 $x^2+y^2=2x$ 逆时针一周；

（2）$\int_L(x^2+y)y\mathrm{d}x+(2xy-\mathrm{e}^{y^2})\mathrm{d}y$，其中 L 由抛物线 $y=4-x^2$ 上从点 $A(2,\ 0)$ 到点 $B(-2,\ 0)$ 的一段有向弧.

2. 证明下列各曲线积分在整个坐标平面 xOy 内与路径无关，并计算积分值.

（1）$\int_L(1+2xy)\mathrm{d}x+(x^2+\sin y)\mathrm{d}y$，其中 L 的起点、终点分别为 $(-\pi,\ 0)$、$(0,\ \pi)$.

（2）$\int_L(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$，其中 L 的起点为 $(0,1)$，终点为 $(2,3)$.

第九章　无 穷 级 数

无穷级数是微积分理论的重要组成部分，在函数表示、研究函数的性质、数值计算等方面有着重要的应用，是学习数学的有力工具. 本章主要讨论两类级数——常数项级数和幂级数，主要包括以下问题：收敛级数的性质，级数的敛散性判定问题，级数的求和问题以及幂级数的展开问题.

第一节　常数项级数的概念和性质

一、常数项级数的概念

定义 1.1　设有一数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$，将各项依次相加所得到的表达式

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

称为常数项级数，简称常数级数，记作 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n = u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots,$$

其中，第 n 项 u_n 称为级数的一般项，或者通项.

级数的前 n 项和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$ 称为级数的前 n 项部分和，简称部分和. 若部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限，即存在常数 S，使得 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$，则称级数收敛，称 S 为级数的和，记作 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S$. 若 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 不存在,则称级数发散.

当级数收敛时，$S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$ 称为级数的余项，记作 r_n. 显然，$\lim_{n\to\infty}r_n=0$.

例 1　判定级数 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 的敛散性.

解　为方便求部分和，我们先把 u_n 分解为

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

则有

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

所以 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$，故级数收敛，其和为 1.

例 2　判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+\cdots+n+\cdots$ 的敛散性.

解　级数的部分和 $S_n = 1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$，显然，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$，故级数发散.

例 3　讨论等比级数（又称为几何级数）

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的敛散性.

解　（1）当 $|q| \neq 1$, 有 $S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$.

若 $|q| < 1$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$. 故级数收敛，其和为 $\dfrac{a}{1-q}$.

若 $|q| > 1$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. 故级数发散.

（2）若 $q = 1$，有 $S_n = na$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. 故级数发散.

（3）若 $q = -1$，则级数变为

$$S_n = a - a + a - a + \ldots + (-1)^{n-1} a = \frac{1}{2} a[1 - (-1)^n],$$

易见 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，故级数发散.

综上所述，当 $|q| < 1$ 时，等比级数收敛，其和为 $\dfrac{a}{1-q}$；当 $|q| \geqslant 1$ 时，级数发散.

例 4　判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\dfrac{n+1}{n}$ 的敛散性.

解　因为 $\ln\dfrac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$，所以

$$\begin{aligned} S_n &= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) \\ &= \ln(n+1) \to \infty \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

故级数发散.

二、收敛级数的性质

性质 1　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且和为 S，k 为常数，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛，并且其和为 kS.

性质 2　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，且和分别为 S、σ，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，并且其和为 $S \pm \sigma$.

注：两发散级数的和或差可能收敛也可能发散.

性质 3　在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中去掉、添加或改变有限项，不改变级数的敛散性.

性质 4　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，那么对它任意添加括号后所得的新级数仍收敛，且和不变.

推论　如果加括弧后所成的级数发散，则原来级数也发散.

前面例 4 中的级数就可以证明该推论.

性质 5　（级数收敛的必要条件）如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

证　由已知条件，设 $S=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，则有

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} S_{n-1},$$

这样就有

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S-S=0.$$

推论　如果 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例 5　证明调和级数 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots$ 是发散的.

证　对题目中的级数按下列方式加括号

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}\right)+\cdots$$

设所得新级数为 $\sum_{m=1}^{\infty} v_m$，则易见其每一项均大于 $\dfrac{1}{2}$，从而当 $m\to\infty$ 时，v_m 不趋于零.

由性质 5 推论知 $\sum_{m=1}^{\infty} v_m$ 发散，再由性质 4 推论知，调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散．证毕.

例 6　判别级数 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2\times 10}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{10n}+\cdots$ 是否收敛.

解　将所给级数每相邻两项加括号得到新级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{10n}\right)$．因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{10n}=\dfrac{1}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{10n}\right)$ 发散，根据性质 4 的推论，去括号后的级数 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2\times 10}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{10n}+\cdots$ 也发散.

例 7　试判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{1}{n}$ 的敛散性.

解　由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{n}=1\neq 0$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{1}{n}$ 发散.

习题 9.1

1. 写出级数 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2\cdot 4}+\dfrac{5}{2\cdot 4\cdot 6}+\dfrac{7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$ 的一般项.

2. 判定级数的敛散性.

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$；　　（2）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$；

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10n}{n+1}$；　　（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{3}{n(n+1)}\right)$.

3. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散.

第二节　正项级数的判别法

正项级数是一类很重要的级数，有了正项级数敛散性的判别方法，我们就可以讨论任意项级数的敛散性.

定义 2.1　各项都是正数或零的级数，称为正项级数.

显然，正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 为单调递增数列.

定理 2.1　正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

该定理的必要性显然成立，充分性由第一章的“单调有界数列必收敛”准则也可直接得到.

一、比较判别法

定理 2.2（比较判别法）　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 为正项级数，如果从某一项起，恒有 $u_n\leqslant v_n$，则有

（1）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；

（2）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也发散.

证　（1）设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的部分和数列为 $\{\sigma_n\}$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，因此由定理 2.1 知，$\{\sigma_n\}$ 必定有界，不妨假定 M 为它的一个上界，即

$$\sigma_n\leqslant M,$$

从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqslant v_1 + v_2 + \cdots v_n = \sigma_n \leqslant M ,$$

这说明，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界，由定理 2.1 知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

（2）用反证法. 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，由（1）的结论知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，这与已知显然矛盾！因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

例 1　讨论 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$（$p > 0$）的敛散性.

解　当 $p \leqslant 1$ 时，有 $\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n}$，因为调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，由定理 2.2 知，p 级数发散.

当 $p > 1$ 时，有 $\frac{1}{n^p} < \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$，所以

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \\ &< 1 + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} + \cdots + \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \\ &= 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right) \\ &< 1 + \frac{1}{p-1} . \end{aligned}$$

即 S_n 有界，由定理 2.1 知，p 级数收敛.

综上所述，当 $p \leqslant 1$ 时，p 级数发散；当 $p > 1$ 时，p 级数收敛.

例 2　判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 的敛散性.

解　因为 $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散.

例 3　判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n2^n}$ 的敛散性.

解　因为 $\frac{n-1}{n2^n} < \frac{n}{n2^n} = \frac{1}{2^n}$，而等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n2^n}$ 收敛.

定理 2.3（比较判别法的极限形式）　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，并且 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$，

（1）若 $l > 0$，则两级数有相同的敛散性；

（2）若 $l = 0$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

（3）若 $l = +\infty$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

证明略.

例 4　判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性.

解　因为 $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{n^2}(n\to\infty)$，所以,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}n^2u_n=\lim_{n\to\infty}n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{1}{n^2}=1,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由定理 2.3 知，$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛.

例 5　判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^p}$（$p>0$）的敛散性.

解　由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{n^p}}=1>0$，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^p}$（$p>0$）与 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$（$p>0$）有相同的敛散性，故当 $p>1$ 时，级数收敛；当 $p\leqslant 1$ 时，级数发散.

二、比值判别法

定理 2.4（比值判别法）　设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则

（1）当 $\rho<1$ 时，级数收敛；

（2）当 $\rho>1$（或 $\rho=+\infty$）时，级数发散；

（3）当 $\rho=1$ 时，级数可能收敛也可能发散.

比值判别法又称为达朗贝尔判别法.

该定理，我们也不给出证明过程.

例 6　判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{2^n}$ 的敛散性.

解　$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3(n+1)}{2^{n+1}}}{\frac{3n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3(n+1)}{3n}=\frac{1}{2}<1$，由比值判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{2^n}$ 收敛.

例 7　判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{n!}$ 的敛散性.

解　$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^5}{(n+1)!}}{\frac{n^5}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\frac{(n+1)^5}{n^5}=0\cdot 1=0<1$，由比值判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{n!}$ 收敛.

三、根值判别法

定理 2.5（根值判别法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则

（1）当 $\rho<1$ 时，级数收敛；

（2）当 $\rho>1$（或 $\rho=+\infty$）时，级数发散；

（3）当 $\rho=1$ 时，级数可能收敛也可能发散.

根值判别法又称为柯西判别法.

例 8 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$ 的敛散性.

解 由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{3}<1$，由根值判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$ 收敛.

例 9 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ 的敛散性.

解 由于 $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$，由根值判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ 收敛.

习题 9.2

1. 判定下列级数的敛散性.

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{(n+1)(2n+1)}$；（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$；（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$；（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!5^n}{n^n}$；

（7）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$；（8）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

2. 设 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n\ (n=1,2,\cdots)$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛.

第三节　任意项级数

上节讨论了关于正项级数收敛性的判别法，本节要进一步讨论关于任意项级数收敛性的判别法，这里所谓“任意项级数”是指级数的各项可以是正数、负数或零. 先来讨论一种特殊的级数——交错级数的敛散性的判别法，然后再讨论任意项级数的敛散性的判别法.

一、交错级数收敛性的判别法

定义 3.1 如果 $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$ 均为正数，则称

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots$$

或

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n = -u_1 + u_2 - \cdots + (-1)^n u_n + \cdots$$

为交错级数.

对交错级数的敛散性的判别方法如下.

定理 3.1（莱布尼茨定理） 如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足：

（1）$u_n \geqslant u_{n+1} (n=1,2,\cdots)$；

（2）$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，其和 $S \leqslant u_1$，且余项的绝对值 $|r_n| \leqslant u_{n+1}$.

例 1 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$ 的敛散性.

解 该交错级数满足：（1）$u_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = u_{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$；（2）$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$，所以该级数收敛，其和 $S \leqslant 1$，用 S_n 近似 S 产生的误差 $|r_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$.

例 2 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ 的敛散性.

解 由于 $u_n = \frac{\ln n}{n} > 0\ (n>1)$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ 是交错级数.

令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}\ (x>3)$，有 $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0\ (x>3)$，即 $n>3$ 时，$\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$ 是递减数列，由洛必达法则，$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$，则由莱布尼茨定理知该级数收敛.

二、绝对收敛与条件收敛

定义 3.2 对于任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛； 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

定理 3.2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

注意：绝对收敛的级数重排后得到的新级数也绝对收敛，且其和相等.

例 3 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\ (p>0)$ 的敛散性.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，当 $p>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，故原级数绝对收敛；

当 $0 < p \leqslant 1$ 时，由莱布尼茨定理知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散，故原级数条件收敛.

例 4　判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ 的敛散性.

解　由于 $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ 收敛，故原级数绝对收敛.

习题 9.3

判定下列级数的敛散性.

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}$；　（2）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$；　（3）$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{\mathrm{e}^n}$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$；　（5）$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$；　（6）$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

第四节　幂　级　数

一、函数项级数的概念

定义 4.1　设 $u_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 是定义在区间 I 上的函数，称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

为定义在区间 I 上的函数项级数.

若 $x_0 \in I$，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛（发散），称 x_0 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛（发散）点. 所有收敛点的全体称为其收敛域，所有发散点的全体称为其发散域.

在收敛域 X 上，函数项级数的和是 x 的函数 $S(x)$，称为级数的和函数，即

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots,\quad x \in X .$$

记 $S_n(x)$ 为函数项级数前 n 项的和，余项 $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$，则在收敛域上有 $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

二、幂级数及其收敛性

定义 4.2　形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

的级数称为幂级数. 其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 为常数，称为幂级数的系数.

当 $x_0 = 0$ 时，幂级数的形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots.$$

例如，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ ，当 $|x|<1$ 时，该级数收敛，其和为 $\dfrac{1}{1-x}$ ；当 $|x|\leqslant 1$ 时，该级数发散. 因此，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$.

定理 4.1（阿贝尔定理） 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 x_0（ $x_0 \neq 0$ ）处收敛，则对于满足 $|x|<|x_0|$ 的一切 x ，幂级数都绝对收敛；如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 x_0 （ $x_0 \neq 0$ ）处发散，则对于满足 $|x|>|x_0|$ 的一切 x ， 幂级数都发散.

由定理 4.1 知，如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不是仅在 $x=0$ 点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，那么必有一个确定的正数 R 存在，使得当 $|x|<R$ 时，该级数绝对收敛；当 $|x|>R$ 时，该级数发散；当 $|x|=R$ 时，可能收敛，也可能发散.

正数 R 称为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径，区间 $(-R,R)$ 称为幂级数的收敛区间. $x=\pm R$ 表示幂级数收敛与发散的分界点，幂级数的收敛域可能是 $(-R,R)$ ， $[-R,R)$ ， $(-R,R]$ ， $[-R,R]$.

如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 只在 $x=0$ 点收敛，则规定收敛半径 $R=0$ ，其收敛域只有一个点 $x=0$ ；如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在整个数轴上都收敛，则规定收敛半径 $R=+\infty$ ， 其收敛域是 $(-\infty,+\infty)$.

定理 4.2　如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$ ，则

（1）当 $0<\rho<+\infty$ 时，收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}$ ；

（2）当 $\rho=0$ 时，收敛半径 $R=+\infty$ ；

（3）当 $\rho=+\infty$ 时，收敛半径 $R=0$.

例 1　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n}$ 的收敛域.

解　因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/(n+1)}{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = 1$ ，所以收敛半径 $R=1$.

当 $x=1$ 时，幂级数成为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ ，该级数收敛；当 $x=-1$ 时，幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ ，该级数发散. 从而，收敛域为 $(-1,1]$.

例 2　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ 的收敛域.

解　因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$，所以收敛半径 $\rho=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

例 3　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2^n}$ 的收敛域.

解　幂级数缺少偶数次幂，上述定理不能直接运用. 由比值判别法，知

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{|x|^{2n-1}}=\frac{1}{2}|x|^2.$$

当 $\dfrac{1}{2}|x|^2<1$，即 $|x|<\sqrt{2}$ 时，级数收敛；当 $\dfrac{1}{2}|x|^2>1$，即 $|x|>\sqrt{2}$ 时，级数发散，所以收敛半径 $R=\sqrt{2}$；当 $x=\sqrt{2}$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，该级数发散；当 $x=-\sqrt{2}$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$，该级数发散. 故所求收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

例 4　求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^n$ 的收敛域.

解　令 $t=\dfrac{x-2}{x}$，原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}t^n$，容易求得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}t^n$ 的收敛域为 $-1\leqslant t<1$，即 $-1\leqslant\dfrac{x-2}{x}<1$，解得 $x\geqslant 1$，所以原级数的收敛域为 $[1,+\infty)$.

三、幂级数的运算

1. 幂级数的代数运算性质

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 及 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1,R_2，令 $R=\min\{R_1,R_2\}$，则有

（1）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n,x\in(-R,R)$；

（2）$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\cdot\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n,\ x\in(-R,R)$，其中 $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$.

2. 幂级数的和函数的性质

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，和函数为 $S(x)$，则

（1）$S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内连续；

（2）$S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内可导，且逐项求导公式为

$$S'(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1},\ x\in(-R,R)\ ;$$

（3） $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内可积，且逐项积分公式为

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\ x\in(-R,R)\,.$$

例 5　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的和函数.

解　该幂级数的收敛域为 $(-1,1]$，设其和函数为 $S(x)$，即

$$S(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots.$$

逐项求导，得

$$S'(x)=1-x+x^2+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1+x}\text{，（}-1<x<1\text{）}.$$

由积分公式 $\int_0^x S'(x)\mathrm{d}x=S(x)-S(0)$，得

$$S(x)=S(0)+\int_0^x S'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(1+x),$$

因该幂级数在 $x=1$ 时收敛，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x)\text{，（}-1<x\leqslant 1\text{）}.$$

例 6　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^n$ 的和函数.

解　该幂级数的收敛域为 $(-1,1)$，设其和函数为 $S(x)$，即 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}$，对 $\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}$ 逐项积分，得

$$\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n\,x^{n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$，故有

$$S(x)=\frac{x}{(1-x)^2},\ x\in(-1,1)\,.$$

习题 9.4

1. 求下列幂级数的收敛域.

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}x^n$；　（2）$\sum_{n=0}^{\infty}n!\,x^n$；　（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}x^{3n}$；　（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{4^n}\right]x^n$.

2. 求下列幂级数的和函数.

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$；　（2）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$.

第五节　函数展开成幂级数

前面讨论了幂级数的收敛域以及幂级数在其收敛域上的和函数. 现在考虑相反的问题，即对于给定的函数 $f(x)$，是否存在幂级数，它在某个区间内收敛，且和函数恰好等于给定的函数 $f(x)$. 如果能找到这样的幂级数，就称函数 $f(x)$ 在该区间内能展开成幂级数.

一、泰勒级数

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有直到 $n+1$ 阶导数，则在此邻域内有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

此式称为 $f(x)$ 的泰勒公式，其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$（$\xi$ 在 x 与 x_0 之间）称为拉格朗日余项.

在泰勒公式中，当 $x_0=0$ 时，则有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

该式称为麦克劳林公式，其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$（$\xi$ 在 0 与 x 之间）.

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有任意阶导数，则称

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \tag{5.1}$$

为 $f(x)$ 的泰勒级数.

在泰勒级数中，令 $x_0=0$，则有

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots,$$

称为 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

定理 5.1　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数，则在该邻域内 $f(x)$ 的泰勒级数收敛到 $f(x)$，即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$， $x\in U(x_0)$.

在满足定理的条件下，$f(x)$ 的泰勒级数收敛到 $f(x)$，也称 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 能展开成幂级数，称式（5.1）为 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 的泰勒展开式，或 $f(x)$ 在 x_0 展开的幂级数，且展开式是唯一的.

二、函数展开成幂级数

1. 直接展开法

根据以上讨论，将 $f(x)$ 展开成幂级数，可按以下步骤进行：

（1）求出 $f(x)$ 及其各阶导数在 $x=0$ 的值

$$f(0),f'(0),\cdots,f^{(n)}(0),\cdots;$$

（2）写出幂级数

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots,$$

并求出收敛半径 R；

（3）验证在 $(-R,R)$ 内 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ 是否成立. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，则 $f(x)$ 在 $(-R,R)$ 内展开成幂级数

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots.$$

例 1　将函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 展开成 x 的幂级数.

解　由 $f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x$，得 $f^{(n)}(0)=1\ (n=0,1,2,\cdots)$，得级数

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,$$

该级数的收敛半径为 $R=+\infty$. 对于任何有限的数 x，有

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\mathrm{e}^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}，（\xi\text{ 在 0 与 }x\text{ 之间}）.$$

因 $\mathrm{e}^{|x|}$ 有限，而 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 是收敛级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 的一般项，所以 $\mathrm{e}^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$（$n\to\infty$），即有 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

因此， $\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$， $x\in(-\infty,+\infty)$.

例 2　将函数 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解　$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\ (n=0,1,2,\cdots)$， $f^{(n)}(0)$ 依次取 $0,1,0,-1,\cdots$（$n=0,1,2,\cdots$），于是得级数

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,$$

该级数的收敛半径为 $R=+\infty$．对于任何有限的数 x，有

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\sin\left[\xi+\frac{(n+1)\pi}{2}\right]}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0\text{，（}n\to\infty\text{），}$$

其中 ξ 在 0 与 x 之间．于是

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

利用直接展开法还可得到下列函数的幂级数展开式：

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots,\qquad x\in(-1,1]$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\qquad x\in(-1,1)$$

特别地，当 m 为正整数时，级数成为 x 的 m 次多项式，它就是中学学习过的二项式定理．例如，对应 $m=\frac{1}{2}$， $m=-\frac{1}{2}$ 的二项展开式分别为

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots,\qquad x\in[-1,1];$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots,\qquad x\in(-1,1]$$

2. 间接展开法

例 3 将函数 $\sin x$ 展开成 $x-\pi/4$ 的幂级数.

解
$$\begin{aligned}\sin x&=\sin[\pi/4+(x-\pi/4)]\\&=\sin(\pi/4)\cos(x-\pi/4)+\cos(\pi/4)\sin(x-\pi/4)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1-\frac{(x-\pi/4)^2}{2!}+\frac{(x-\pi/4)^4}{4!}-\cdots+(x-\pi/4)-\frac{(x-\pi/4)^3}{3!}+\frac{(x-\pi/4)^5}{5!}-\cdots\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+(x-\pi/4)-\frac{(x-\pi/4)^2}{2!}-\frac{(x-\pi/4)^3}{3!}+\cdots\right],\quad(-\infty<x<+\infty).\end{aligned}$$

利用间接展开法还可得到下列函数的幂级数展开式：

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots,\qquad(-1<x<1)$$

$$\arctan x=\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,\qquad x\in[-1,1]$$

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{dx}{1+x}=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,\qquad x\in(-1,1]$$

习题 9.5

将以下函数展开成幂级数，并指出其收敛域.

（1）$f(x)=\cos x$；　（2）$f(x)=\ln(1+x)$；　（3）$f(x)=\arctan x$；

（4）$f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$；　（5）$\ln\left(4-3x-x^2\right)$；　（6）$f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$.

附录 A　常用三角函数公式

（1）$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

（2）$\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=1$

（3）$\csc^2\alpha-\cot^2\alpha=1$

（4）$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

（5）$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

（6）$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

（7）$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

（8）$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

（9）$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$

（10）$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

（11）$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$

（12）$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$

（13）$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$

（14）$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$

（15）$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

（16）$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

（17）$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

（18）$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

附录 B　三角函数及其图形

（1）正弦函数 $y=\sin x$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，周期为 2π，是定义域上的奇函数图形如图 B.1 所示；

（2）余弦函数 $y=\cos x$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，周期为 2π，　是定义域上的偶函数，图像如图 B.2 所示；

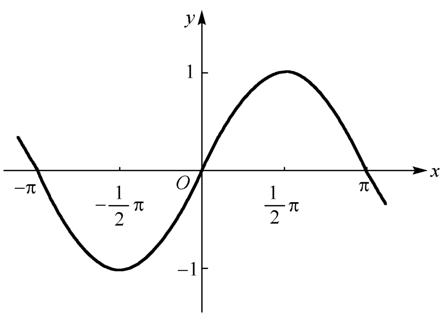


图 B.1

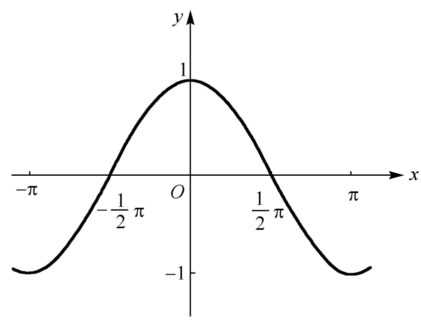


图 B.2

（3）正切函数 $y=\tan x$

其定义域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，周期为 π 图形如图 B.3 所示；

（4）余切函数 $y=\cot x$

其定义域为 $(k\pi,\pi+k\pi)$，$k=0,\pm1,\pm2\cdots$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，周期为 π，图形如图 B.4 所示。

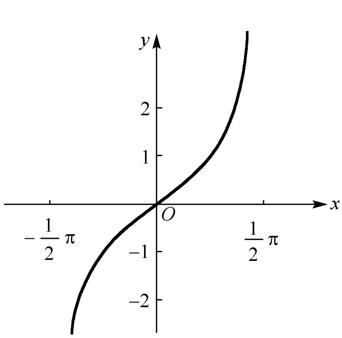


图 B.3

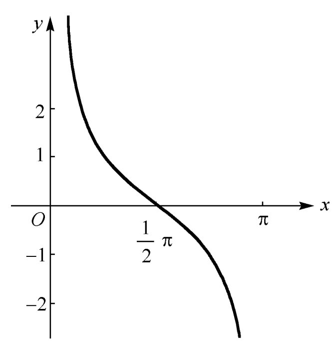


图 B.4

附录 C　反三角函数的图形及其主要性质

（1）反正弦函数 $y=\arcsin x$

其定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，是单调递增的奇函数，图形如图 C.1 所示；

（2）反余弦函数 $y=\arccos x$

其定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$，是单调递减的函数，图形如图 C.2 所示；

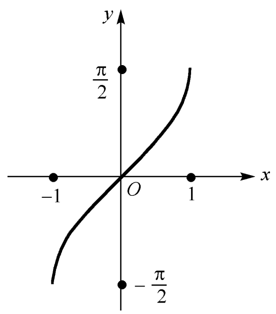


图 C.1

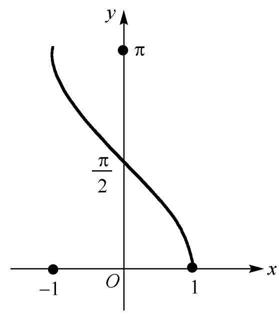


图 C.2

（3）反正切函数 $y=\arctan x$

其定义域为$[-\infty,+\infty]$，值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，是单调递增的奇函数，其图形有两条水平的渐近线 $y=\dfrac{\pi}{2}$ 和 $y=-\dfrac{\pi}{2}$（见图 C.3）；

（4）反余切函数 $y=\operatorname{arc}\cot x$

其定义域为$[-\infty,+\infty]$，值域为$[0,\pi]$，是单调递减的函数，其图形有两条水平的渐近线 $y=0$ 和 $y=\pi$（见图 C.4）。

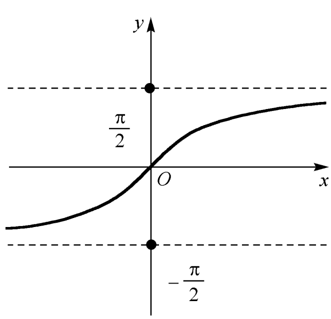


图 C.3

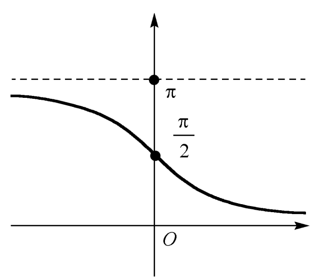


图 C.4

附录 D　常用积分公式

1. 含有有理函数的积分

（1）$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$

（2）$\int (ax+b)^{\mu}\mathrm{d}x=\frac{1}{a(\mu+1)}(ax+b)^{(\mu+1)}+C$　（$\mu\neq -1$）

（3）$\int \frac{x}{ax+b}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\left(ax+b-b\ln|ax+b|\right)+C$

（4）$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax+b)}=-\frac{1}{b}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+C$

（5）$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(ax+b)}=-\frac{1}{bx}+\frac{a}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+C$

（6）$\int \frac{x}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\left(\frac{b}{ax+b}+\ln|ax+b|\right)+C$

（7）$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

（8）$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

（9）$\int \frac{x}{ax^2+b}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+b\right|+C$

（10）$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax^2+b)}=\frac{1}{2b}\ln\left|\frac{x^2}{ax^2+b}\right|+C$

（11）$\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+b)^2}=\frac{x}{2b(ax^2+b)}+\frac{1}{2b}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b}$

2. 含有根式函数的积分

（1）$\int \sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3}+C$

（2）$\int x\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{15a^2}(3ax-2b)\sqrt{(ax+b)^3}+C$

（3）$\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3a^2}(ax-2b)\sqrt{ax+b}+C$

（4）$\int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}}\mathrm{d}x=\frac{2}{15a^3}\left(3a^2x^2-4abx+8b^2\right)\sqrt{ax+b}+C$

（5）$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\mathrm{d}x=2\sqrt{ax+b}+b\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}$

（6）$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$

（7）$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \sqrt{x^2+a^2}+C$

（8）$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|}+C$

（9）$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C$

（10）$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$

（11）$\int x\sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+a^2\right)^3}+C$

（12）$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C$

（13）$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \sqrt{x^2-a^2}+C$

（14）$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{|x|}+C$

（15）$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{|x|}+C$

（16）$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$

（17）$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\sqrt{a^2-x^2}+C$

3. 含有三角函数和反三角函数的积分

（1）$\int \sin x dx = -\cos x+C$

（2）$\int \cos x dx = \sin x+C$

（3）$\int \tan x dx = -\ln|\cos x|+C$

（4）$\int \cot x dx = \ln|\sin x|+C$

（5）$\int \sec x dx = \ln|\sec x+\tan x|+C$

（6）$\int \csc x dx = \ln|\csc x-\cot x|+C$

（7）$\int \sec^2 x dx = \tan x+C$

（8）$\int \csc^2 x dx = -\cot x+C$

（9）$\int \sec x\tan x dx = \sec x+C$

（10）$\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$

（11）$\int x \sin ax \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{1}{a}x\cos ax + C$

（12）$\int x \cos ax \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{1}{a}x\sin ax + C$

（13）$\int \arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + C$

（14）$\int \arccos\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C$

（15）$\int \arctan\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln\left(a^2 + x^2\right) + C$

4. 含有指数函数和对数函数的积分

（1）$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + C$

（2）$\int \mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} + C$

（3）$\int x\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}(ax-1)\mathrm{e}^{ax} + C$

（4）$\int \mathrm{e}^{ax}\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}\left(a\sin bx - b\cos bx\right) + C$

（5）$\int \mathrm{e}^{ax}\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}\left(b\sin bx + a\cos bx\right) + C$

（6）$\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$

（7）$\int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x = \ln\left|\ln x\right| + C$

（8）$\int x^n \ln x\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C$

附录 E　极坐标系及其与平面直角坐标系的关系

极坐标系是指在平面内由极点、极轴和极径组成的坐标系。在平面上取定一点O，称为极点。从点O出发引一条射线Ox，称为极轴。再取定一个长度单位，并规定角度取逆时针方向为正。这样，平面上任一点P的位置就可以用线段OP的长度ρ以及从Ox旋转到OP的角度θ来确定，序数对(ρ,θ)就称为点P的极坐标，记为$P\ (\rho,\theta)$；ρ称为点P的极径，θ称为点P的极角，如图 E.1(a)所示。

当限制$\rho \geqslant 0$，$0 \leqslant \theta < 2\pi$时，平面上除极点$O$以外，其他每一点都有唯一的一个极坐标。规定极点的极径为零，极角任意。若除去上述限制，平面上每一点都有无数多组极坐标。一般地，如果(ρ,θ)是一个点的极坐标，那么$(\rho,\theta+2n\pi)$，$(-\rho,\theta+(2n+1)\pi)$，都可作为它的极坐标，其中n是任意正整数。

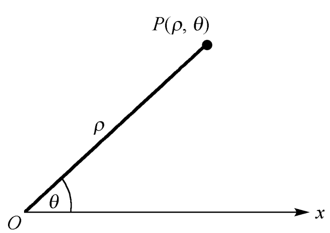
平面上有些曲线，采用极坐标方程表示比较简单。例如以原点为中心，r为半径的圆的极坐标方程为$\rho=r$，等速螺线的极坐标方程为$\rho=a\theta$。

坐标系中的两个坐标ρ和θ可以由下面的公式转换为平面直角坐标系下的坐标（见图 E.1(b)）：

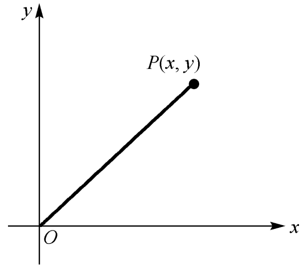
$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

由上述公式，也可得到从直角坐标系中x和y两坐标如何计算出极坐标下的坐标，其关系如下：

$$\begin{cases} \rho^2=x^2+y^2 \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \end{cases}，其中\ x\neq 0 .$$



(a)



(b)

图 E.1

附录 F　几个常见函数及其图形

（1）概率曲线（见图 F.1）

$$y = \mathrm{e}^{-x^2}$$

（2）摆线（见图 F.2）

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

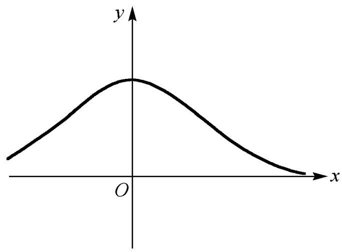


图 F.1

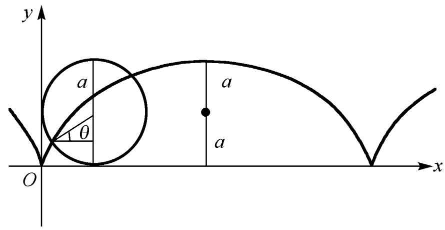


图 F.2

（3）心形线（见图 F.3）

$$\rho = a(1 - \cos\varphi)$$

（4）伯努利双纽线（见图 F.4）

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

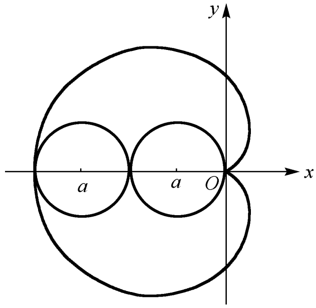


图 F.3

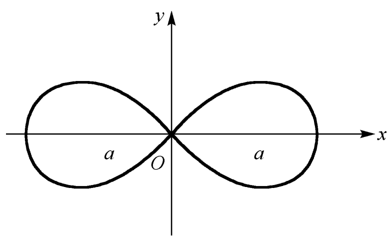


图 F.4

（5）三叶玫瑰线（见图 F.5）

$$\rho = a\cos 3\varphi$$

（6）阿基米德螺线（见图 F.6）

$$\rho = a\varphi$$

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

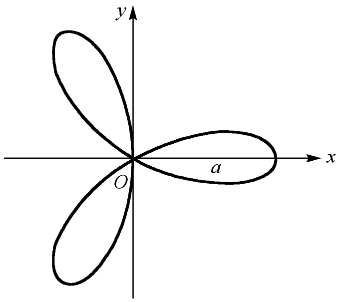


图 F.5

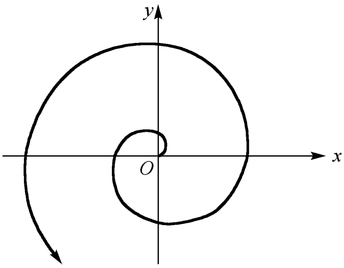


图 F.6

习题参考答案

习题 1.1

1.（1）$\left[-3,3\right]$ ；（2）$(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$；（3）$\left[-1,1\right)$；（4）$\left[\frac{1}{3},1\right]$.

2.（1）是；（2）不是；（3）不是，（4） 不是.
（第二问略）

3. $\varphi(3)=2$； $\varphi(2)=1$； $\varphi(0)=2$； $\varphi(0.5)=2$； $\varphi(-0.5)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. 略.

5. （1）偶函数；（2）偶函数；（3）奇函数；（4）奇函数.

6. 略.

7. 略.

8. 利用定义直接证明

9. （1）是，$T=4$；（2）是，$T=\frac{\pi}{3}$；（3）是，$T=\pi$；（4）不是.

10.（1） $y=\frac{1}{2}(x^2-1)(x\geqslant 0)$；（2） $y=1-\mathrm{e}^x$, $(-\infty<y<+\infty)$；
（3） $y=\frac{b-dx}{cx-a}$, $\left(x\neq\frac{a}{c}\right)$；（4） $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x-2}{3}$， $(-1\leqslant x\leqslant 3)$.

11. 略.

习题 1.2

1.（1）收敛于 0；2）收敛于 1；（3）收敛于 0；（4）收敛于 0；（5）收敛于 1；（6）发散.

2.（1）0；　（2）3；　（3）6；　（4） $\frac{1}{2}$.

3. 略

4.（1）1；　（2）2；　（3） $\frac{1}{1-x}$；　（4）1.

习题 1.3

1.（1） 2；（2） 0；（3） $2x$；（4） 1；（5） 0；（6）cos1；（7）1；（8） $\frac{1}{2}$；（9） $\frac{3}{2}$；
（10） $\frac{1}{2\sqrt{a}}$；（11） 2；（12） $\frac{3}{2}$.

2. $a=-1$.

3. 不存在.

4. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$； $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$； $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=6$.

5. 4.

习题 1.4

1.（1）2；（2）$\dfrac{5}{2}$；（3）2；（4）1；（5）1.

2.（1）$\sqrt{e}$；（2）$1/e$；（3）$1/e^2$；（4）e；（5）0；（6）e^2；（7）e^3；（8）$e^{\frac{1}{2}}$

3. 略.

习题 1.5

1.（1）$x\to 1$ 时，$f(x)$ 为无穷小；$x\to 0$ 时，$f(x)$ 为无穷大.

（2）$x\to 1^-$ 时，$f(x)$ 为无穷小；$x\to 1^+$ 时，$f(x)$ 为无穷大.

2.（1）无穷大量；（2）无穷小量；（3）无穷小量；（4）无穷小量；（5）无穷小量；（6）无穷大量；

3. ∞ -1

4. 0

5. B

6. D

7. B

8. D

9. $x^2+x^3=o(x+x^2)$.

10. （1）0；（2）$\dfrac{2}{3}$；（3）3；（4）$\dfrac{1}{2}$；（5）$\dfrac{1}{2}$；（6）当 $n>m$ 时，原式$=0$；当 $n=m$ 时，原式$=1$；当 $n<m$ 时，原式$=\infty$.

11.（1）0；（2）1；（3）$\dfrac{1}{2}$；（4）2；（5）-1；（6）1；

习题 1.6

1. 必要非充分条件.

2. 0

3. -2

4. C

5. D

6. $k=2$

7. $a=1$，$b=0$

8. 求出下列函数的间断点并判断类型

（1）$x=1$，可去间断点；$x=2$ 无穷间断点.（2）$x=-2$，无穷间断点；$x=1$，无穷间断

点；（3） $x=0$ 为跳跃间断点；（4） $x=k\pi\ (k\in Z,k\neq 0)$ 是第二类中无穷间断点； $x=0$ 是第一类中可去间断点. （5） $x=0$ 为可去间断点. （6） $x=1$ 是函数的可去间断点.

习题 1.7

1. 提示：设 $f(x)=\mathrm{e}^x-x-2$ （ $x\in[0,\ 2]$ ），根据零点定理证之.

2. 提示：设 $f(x)=a\sin x+b-x$ （ $x\in[0,\ a+b]$ ），根据零点定理证之.

3. 提示：设 $f(x)=\cos x-x$ ，（ $x\in(-\infty,+\infty)$ ）取 $(-\infty,+\infty)$ 的一个子闭区间 $[0,\pi]$ ，根据零点定理证之.

4. 提示：取函数 $F(x)=f(x)-x$ ，根据零点定理证之.

5. 略.

6. 提示：取 $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}+x$ （ $x\in(0,1)$ ），根据零点定理证之.

习题 2.1

1.（1）正确；（2）不正确；（3）不正确. 理由略.

2.（1） $y'=10x^9$；（2） $y=-\dfrac{3}{x^4}$；（3） $y=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$； （4） $y=\left(-\dfrac{1}{3}\right)\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$.

3. 在 $A(1,1)$点的切线方程 $2x-y-1=0$ ；在 $B(-2,4)$ 点的切线方程 $2x-y-1=0$.

4.（1） $x-y-1=0$; （2） $2x-y+3=0$.

5. $f'(1)=\mathrm{e}$.

6. $f'(x)=\begin{cases}-\sin x, & x<0\\ 2, & x>0\end{cases}$.

习题 2.2

1.（1） $y'=2x-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ ；（2） $y'=\dfrac{3\sqrt{x}}{2}\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)$ ；（3） $y'=-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{3}{x^2}-1$ ；（4） $y'=\ln x+1$ ；

（5） $y'=2^x\ln 2+\sec^2 x-\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ ；（6） $y'=-\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$.

2.（1） $y'=-7(2-x)^6$ ；（2） $y'=-3\sin(3x+2)$ ；（3） $y'=\dfrac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2}$ ；（4） $y'=-\dfrac{\sec^2\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}$ ；

（5） $y'=\dfrac{2\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{4x}}}$ ；（6） $y'=\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ ；（7） $y'=\dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ ；（8） $y'=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cos\sqrt{1+x^2}$.

3.（1） $y''=\dfrac{2}{(1-x)^3}$ ；（2） $y''=6x-4$ ；（3） $y''=-\dfrac{x}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}$ ；（4） $y''=-\dfrac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$ ；

（5） $y''=(3+2x^2)2x\mathrm{e}^{x^2}$ ；（6） $y''=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)\mathrm{e}^x$.

习题 2.3

1.（1）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{2y+x}$；（2）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y-x^2}{x-y^2}$；（3）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y(x-1)}{x(y-1)}$；（4）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y^2\mathrm{e}^x}{1+y\mathrm{e}^x}$.

2. $x+y-1=0$.

3.（1）$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{(1-y)^3}$；（3）$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{e}^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}$.

4.（1）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$；（2）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^x}{(1-x)^2}[1+(1-x)(1+\ln x)]$；

（3）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sqrt{1+x}}{2\mathrm{e}^{x^2}\sin x}(\frac{1}{1+x}-4x-2\cot x)$；（4）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{xy\ln y-y^2}{xy\ln x-x^2}$.

5.（1）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{-3t^2}{t}=-3t$；（2）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2\sqrt{1+t}}{2\sqrt{1-t}}=\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$；

（3）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}$；（4）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{t}{2}$.

6.（1）$x+2y-4=0$；（2）$2\sqrt{2}x-y-2=0$.

习题 2.4

1.（1）$\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{x}$；（2）$\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$；（3）$\mathrm{d}y=-\frac{\mathrm{d}x}{2x\sqrt{x}}$；（4）$\mathrm{d}y=2(1+x)\mathrm{d}x$.

2.（1）$\mathrm{d}y\big|_{x=\pi/2}=-\mathrm{d}x$；（2）$\mathrm{d}y\big|_{x=1}=0$.

3. $\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.1}}=0.05$.

4.（1）$\sqrt{1.05}\approx1.025$；（2）$\ln1.002\approx0.002$.

习题 3.1

1. $\xi=1$
2. $\xi=\mathrm{e}$.
3. 提示：利用导数恒为零的函数是常数的理论.
4. $f'(x)=0$ 恰有两个实根，且分别位于区间 $(-2，0)$ 与 $(0，2)$ 内.
5. 略.

习题 3.2

1.（1）1；（2）$\frac{m}{n}$；（3）$-\frac{3}{5}$；（4）$\frac{1}{2}$；（5）-1；（6）3；（7）$\frac{1}{2}$；（8）1；（9）0；

（10）$\frac{1}{2}$；（11）0；（12）$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

2. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=1$，不能用洛必达法则求得.

3. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=0$，不能用洛必达法则求得.

习题 3.3

1. $f(x)=-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4$.

2. 略.

3. 略.

4. $-\dfrac{1}{12}$.

习题 3.4

1. 单调递减.

2. 单调递减.

3.（1）单增区间为：$(-\infty，0]$、$[2,+\infty)$，单减区间为：$[0，2]$， 极大值为：$y(0)=0$，极小值为：$y(2)=-4$.

（2）单增区间为：$(-\infty，-1]$、$[1,+\infty)$，单减区间为：$[-1，0)$、$(0，1]$，极大值 $y(-1)=-2$，极小值为：$y(1)=2$.

（3）单增区间为：$(-\infty,1]$，单减区间为：$[1,+\infty)$ 极大值 $y(1)=2$，无极小值.

（4）单增区间为：$(-\infty，0)$、$[2,+\infty)$，单减区间为：$(0，2]$，无极大值，极小值为：$y(2)=\dfrac{e^2}{4}$.

（5）单增区间为：$(-1，0]$，单减区间为：$[0,+\infty)$，极大值为：$y(0)=0$，无极小值.

（6）单减区间为：$(-\infty,0]$，$[2,+\infty)$，单增区间为：$[0,2]$，极大值 $y(2)=4e^{-2}$，极小值为：$y(0)=0$.

4.（1）最大值为 $M=25$，最小值为 $m=-2$.

（2）最大值为 $M=\dfrac{5}{4}$，最小值为 $m=\sqrt{6}-5$.

5. 略.

6. 略.

习题 3.5

1.（1）凸区间为：$(-\infty，1]$，凹区间为：$[1，+\infty)$，拐点是：$(1，6)$.

（2）凸区间为：$(0，+\infty)$， 凹区间为：$(-\infty，0)$，无拐点.

（3）凸区间为：$(-\infty,2]$，凹区间为：$[2,+\infty)$，拐点是：$(2,2e^{-2})$.

（4）凸区间为：$(-\infty，-1]$，$[1，+\infty)$，凹区间为 $[-1,1]$：，拐点是：$(-1,\ln 2),(1,\ln 2)$.

2. $a=-1,b=3$.

3. 略.

4. 略.

习题 3.6

1.（1）$K=\dfrac{2}{(4x^2+16x+17)^{3/2}}$ （2）$K=|\cos x|$

2. $K=\dfrac{|2|}{(1+0)^{3/2}}=2$，$\rho=\dfrac{1}{K}=1/2$

3. $K=\dfrac{4\sqrt{5}}{25},\rho=\dfrac{1}{K}=\dfrac{5\sqrt{5}}{4}$.

习题 4.1

1.（1）$-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+C$；（2）$\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}+C$；（3）$\dfrac{2^x}{\ln 2}-\dfrac{x^4}{4}+C$；（4）$\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\dfrac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$；

（5）$3\arcsin x-2\arctan x+C$；（6）$x-\arctan x+C$；（7）e^x+x+C；（8）$\dfrac{3^x\mathrm{e}^x}{\ln 3+1}+C$；

（9）$\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin x}{2}+C$；（10）$-\cot x-\tan x+C$.

2. $2\mathrm{e}^{x^2}$.

3. $y=x^2+1$.

4. 略.

习题 4.2

1.（1）$\dfrac{1}{4}$；（2）$-\dfrac{1}{3}$；（3）$\dfrac{1}{8}$；（4）$\dfrac{1}{3}$；（5）$\dfrac{1}{3}$；（6）2.

2.（1）$-\dfrac{1}{15}(5-3x)^5+C$；（2）$-\dfrac{1}{5}\ln\left|x^2+3x+1\right|+C$；（3）$\dfrac{2}{15}(1+x^5)^{\frac{3}{2}}+C$；

（4）$\mathrm{e}^{\arcsin x}+C$；（5）$\dfrac{1}{2}\sin x^2-4\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}+C$；（6）$-2\cos\sqrt{x}+C$；（7）$\arctan \mathrm{e}^x+C$；

（8）$\ln|\ln x|+C$；（9）$\sin x-\dfrac{1}{3}\sin^3 x+C$；（10）$\dfrac{1}{2\cos^2 x}+C$；（11）$\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}+C$；

（12）$\dfrac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+C$；（13）$\ln\left|x^2+3x+1\right|+C$；（14）$\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|+C$；

（15）$\arctan(x+2)+C$；（16）$\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2x-1}{2}+C$；

（17）$\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(1+x)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right|+C$；（18）$\sqrt{2x}+\ln(1+\sqrt{2x})+C$；

（19）$2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C$；（20）$\arcsin x-\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}+C$；

（21）$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

习题 4.3

1.（1）$x\sin x+\cos x+C$；（2）$-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$；（3）$-\frac{1}{2}x^2+x\tan x+\ln|\cos x|+C$；

（4）$x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$；（5）$(1+x)\ln(1+x)-x+C$；（6）$2\sqrt{x}(\ln x-2)+C$；

（7）$\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$；（8）$\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\arccos x-\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+C$；

（9）$(3\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}+6)e^{\sqrt[3]{x}}+C$；（10）$(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C$；

（11）$-(x^2+2x+1)e^{-x}+C$；（12）$\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)+C$.

2. $\cos x+C$.

习题 4.4

1.（1）$\int_{-7}^{5}(x^2-3x)dx$；（2）$\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx$.

2.（1）0；（2）$\frac{\pi a^2}{4}$.

3.（1）$2\pi\leqslant\int_0^{2\pi}(2+\sin x)dx\leqslant 6\pi$；（2）$4\leqslant\int_0^2(x^2-2x+3)dx\leqslant 6$；

（3）$0\leqslant\int_0^1\arctan x dx\leqslant\frac{\pi}{4}$.

4.（1）$\int_0^1 x^2dx\geqslant\int_0^1 x^3dx$；（2）$\int_1^2\sqrt{x}dx\geqslant\int_1^2\sqrt[3]{x}dx$；（3）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x dx\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x dx$.

5.（1）4；（2）-4.

习题 4.5

1.（1）$\sin e^x$；（2）$\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}(\cos\sqrt[3]{x^2}+1)$；（3）$-\frac{2\sin x^2}{x}$；（4）$2\sqrt{1+8x^3}-2x\sqrt{1+x^6}$.

2.（1）$\frac{17}{6}$；（2）$\frac{73}{6}$；（3）$\frac{\pi}{3a}$；（4）$\pi-4$；（5）$\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$；（6）1.

3.（1）$\frac{1}{3}$；（2）12；（3）$\frac{1}{2}$.

4. 略.

习题 4.6

1.（1）$\frac{51}{512}$；（2）$\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$；（3）$\pi+\frac{4}{3}$；（4）$\frac{1}{2}(25-\ln 26)$；（5）$\frac{\pi}{12}$；（6）$\frac{4}{3}$；（7）$\frac{5}{3}$；

（8）$3\ln 2-\frac{3}{2}$；（9）$\frac{1}{6}$；（10）$\frac{2}{15}$；（11）$\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$；（12）$\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.（1）-2；（2）$2-5\mathrm{e}^{-1}$；（3）$4(2\ln 2-1)$；（4）$\frac{\pi}{12}-\frac{1}{6}(1-\ln 2)$；（5）$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-1)$；（6）2.

3.（1）0；（2）$2(\sqrt{2}-1)$；（3）$\frac{1}{2}$.

4. 1.

5. 略.

习题 4.7

1.（1）$\frac{1}{2}$；（2）发散；（3）$\frac{1}{a}$；（4）-1；（5）$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$；（6）1；（7）发散；（8）2.

2. $n!$.

习题 4.8

1.（1）19；（2）$\frac{5}{3}$；（3）$\frac{\pi}{4}a^2$.

2.（1）2π；（2）$\frac{\pi}{30}$；（3）$\frac{8\pi}{3}$； π.

3.（1）$2\sqrt{3}-\frac{4}{3}$；（2）$\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}$；（3）$8R$.

4. 19.

5. $0.18k$.

6. 205.8.

习题 5.1

1.（1）一阶；（2）一阶；（3）二阶；（4）五阶.

2.（1）通解；（2）特解；（3）通解；（4）特解.

3. 略.

4.（1）$y^2-x^2=25$；（2）$y=x\mathrm{e}^{2x}$.

5. $y=\frac{1}{3}(x^3-1)$.

6. $x=\frac{t^4}{12}-\frac{t^2}{2}+t$.

7. $t=50\ \mathrm{s}$， $s=500\ \mathrm{m}$.

习题 5.2

1.（1）$10^x+10^{-y}+C=0$;　（2）$y=\mathrm{e}^{Cx}$;　（3）$\frac{1}{y}=1-Cx$;

（4）$C(1-\mathrm{e}^{-y})=\mathrm{e}^x$;　（5）$y=\mathrm{e}^{\tan\frac{x}{2}}$;　（6）$\sqrt{2}\cos y-\cos x=0$.

2.（1） $y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2$;　　（2） $\ln(Cy)+\dfrac{x}{y}=0$;　　（3） $x^2=\mathrm{e}^{\frac{y^2}{x^2}}$.

3. $x=y-\dfrac{1}{y}$.

4.（1） $y=\dfrac{1}{2}(x+1)^4+C(x+1)^2$;　　（2） $y=\mathrm{e}^{-\sin x}(x+C)$;

（3） $x=\dfrac{1}{2}(y^2+y+\dfrac{1}{2})+C\mathrm{e}^{2y}$;　　（4） $2x\ln y=\ln^2 y+C$.

5.（1） $y=\dfrac{x}{2}+1+\dfrac{2}{x}$;　　（2） $y=(x+1)\sec x$.

6. $y=2(\mathrm{e}^x-x-1)$.

7. （1） $y^{-2}=C\mathrm{e}^{2x^2}+x^2+\dfrac{1}{2}$;　　（2） $7y^{-\frac{1}{3}}=Cx^{\frac{2}{3}}-3x^3$.

习题 5.3

1.（1） $y=x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$;　　（2） $y=\dfrac{x^2}{2}\ln x+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$;

（3） $y=C_1\mathrm{e}^x-\dfrac{x^2}{2}-x+C_2$;　　（4） $y=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2$.

2.（1） $y=-\dfrac{1}{2}\ln^2 x-\ln x+2x-2$;　　（2） $y=3x+x^3$.

3. $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x}{2}+1$.

习题 5.4

1.（1） $y=C_1+C_2\mathrm{e}^{4x}$;　　（2） $y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{-3x}$;

（3） $y=C_1\mathrm{e}^{(1+\sqrt{2})x}+C_2\mathrm{e}^{(1-\sqrt{2})x}$;　　（4） $y=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}t}$;

（5） $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$;　　（6） $y=\mathrm{e}^x(C_1\cos\sqrt{2x}+C_2\sin\sqrt{2x})$.

2.（1） $y=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{4x}$;　　（2） $y=(2+x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$;　　（3） $y=\cos x+\sin x$.

3. $y=\cos 3x-\dfrac{1}{3}\sin 3x$.

4.（1） $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-1$;　　（2） $y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}x}+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{5}x^2+\dfrac{7}{25}x$;

（3） $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{3x}+\dfrac{2}{9}x^2+\dfrac{5}{27}x+\dfrac{11}{27}$;　　（4） $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}+\mathrm{e}^x$;

（5） $y=\mathrm{e}^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\dfrac{1}{4}x\mathrm{e}^x\cos 2x$;

（6） $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{10}\cos 2x$.

5.（1） $y=-e^{2x}+\frac{1}{2}e^{4x}+\frac{1}{2}$;　　（2） $y=-\cos x-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x$.

习题 5.5

1. $p=10^5\times 2^{\frac{t}{10}}\ \text{m}^3$.

2. $50\sqrt{29}$ cm/s.

3. $\theta=10+190e^{\frac{t}{40}\ln\frac{9}{19}}, t=158$ s.

4. $s=\frac{m}{C^2}\ln Ch\left(C\sqrt{\frac{g}{m}}t\right)$.

5. $x=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$.

习题 6.1

1. $5\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$.

2. $\overrightarrow{DA}=-\boldsymbol{c}-\frac{\boldsymbol{a}}{3}$， $\overrightarrow{EA}=-\boldsymbol{c}-\frac{2\boldsymbol{a}}{3}$.

3. 略.

习题 6.2

1. 第五卦限，第六卦限，第七卦限，第一卦限.

2. xOz 坐标面，y 轴，x 轴，yOz 坐标面.

3.（1）关于 xOy 坐标面的对称点为（$a, b, -c$），关于 yOz 坐标面的对称点为（$-a, b, c$），关于 zOx 坐标面的对称点为（$a, -b, c$）;

（2）关于 x 轴的对称点为（$a, -b, -c$），关于 y 轴的对称点为（$-a, b, -c$），关于 z 轴的对称点为（$-a, -b, c$）;

（3）关于原点的对称点为（$-a, -b, -c$）.

4. C（1, 4, 7），D（0, 5, 1）.

5. $m=4$，$n=-1$.

6. 略.

7. 到 x 轴、y 轴、z 轴的距离分别为 $3\sqrt{2}$、$\sqrt{13}$、$\sqrt{13}$.

8. $\sqrt{15};\frac{-2}{\sqrt{15}},\frac{-2}{\sqrt{15}},\frac{3}{\sqrt{15}};\arccos\frac{-2}{\sqrt{15}},\arccos\frac{-2}{\sqrt{15}},\arccos\frac{3}{\sqrt{15}}$.

9. 2.

习题 6.3

1. -4;　$-4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$.

2. $k(2,-2,4)$，　$k\neq 0$.

3.（1）$k=-\dfrac{2}{27}$;（2）$k=3$.

4. $\sqrt{10}$.

5. $\lambda=2\mu$.

6. 略.

7. $\dfrac{\pi}{3}$.

习题 6.4

1.（1）$y+3=0$;（2）$2x-y+3z+1=0$;（3）$x-3y-2z=0$;（4）$9x-7y-6z+23=0$;（5）$x-5y-5=0$;（6）$x-y+z=3$;（7）$x+2y+2z\pm 6=0$.

2.（1）yOz 坐标面;（2）平行于 zOx 坐标面，在 y 轴上的截距为 $\dfrac{1}{2}$；（3）平行于 z 轴的平面;（4）过原点，且垂直于 $n=(1,3,-2)$；（5）过 z 轴，且垂直于 $n=(1,2,0)$；（6）在三个坐标轴上的截距依次为 6，3，−2.

3. $\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}$.

4. $\dfrac{1}{3}$.

5.（$1,-1,3$）.

6. $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

习题 6.5

1. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{4}$.

2. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$.

3. 点向式方程：$\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-\frac{3}{2}}{1}=\dfrac{z-\frac{5}{2}}{3}$;参数方程：$\begin{cases} x=-2t \\ y=\dfrac{3}{2}+t \\ z=\dfrac{5}{2}+3t \end{cases}$.

4. $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{2}$.

5. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$.

6. $\cos\varphi=\dfrac{4}{3.566}$.

7. $\varphi=0$.

8. （1）平行（不在平面上）;（2）垂直;（3）平行（不在平面上）.

9. （35, 10, –41）.

10. $\begin{cases} x+4y-2z+5=0 \\ 2x+z+4=0 \end{cases}$.

习题 6.6

1. $9x^2-4(y^2+z^2)=36$； $9(x^2+z^2)-4y^2=36$.
2. （1）绕 z 轴；（2）绕 y 轴；（3）绕 x 轴；（4）绕 y 轴.
3. （1）椭圆柱面；（2）双曲柱面；（3）椭圆抛物面；（4）双曲抛物面；（5）椭圆锥面；（6）锥面；（7）椭球面；（8）单叶双曲面.
4. （1）圆周，圆柱面；（2）双曲线，双曲柱面；（3）一直线，一平面；（4）抛物线，抛物柱面；（5）两相交直线，两相交平面；（6）椭圆，椭圆柱面.

习题 6.7

1. 两正交圆柱的交线.
2. $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \\ z=1 \end{cases}$ （ $0\leqslant\theta<2\pi$ ）.
3. （1）z=2 平面上的双曲线，y 轴是虚轴；（2）z=1 平面上的圆，圆心在（0，0，1）.
4. $\begin{cases} x^2+y^2-ax=0 \\ z=0 \end{cases}$; $\begin{cases} a^2-z^2-a\sqrt{a^2-y^2-z^2}=0 \\ x=0 \end{cases}$.
5. $x^2+y^2\leqslant 4; y^2\leqslant z\leqslant 4; x^2\leqslant z\leqslant 4$.

习题 7.1

1. （1） $D=\{(x,y)\,|\,y\neq\pm x\}$.　　（2） $D=\{(x,y)\,|\,y>0, x>0\}$.
2. （1）0.　（2）2.　（3）2.　（4） $\ln 2$.
3. 略.
4. （1） $E=\{(x,y)\,|\,y-x=0\}$.　（2） $E=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$.

习题 7.2

1. （1） $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^2+\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}}=y^2+\dfrac{1}{2\sqrt{xy}}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xy+\sqrt{x}\cdot(-\dfrac{1}{2}y^{-3/2})=2xy-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{y^3}}$.

（2） $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(x-2y)}}\cdot\dfrac{1}{x-2y}=\dfrac{1}{2(x-2y)\sqrt{\ln(x-2y)}}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(x-2y)}}\cdot\dfrac{1}{x-2y}\cdot(-2)=\dfrac{-1}{(x-2y)\sqrt{\ln(x-2y)}}$.

（3） $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x^3+\ln y}\cdot 3x^2=\dfrac{3x^2}{x^3+\ln y}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x^3+\ln y}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{y(x^3+\ln y)}$.

（4）$\frac{\partial u}{\partial x}=z^{\frac{x}{y}}\ln z\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{y}z^{\frac{x}{y}}\ln z$，$\frac{\partial u}{\partial y}=z^{\frac{x}{y}}\ln z\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{y^2}z^{\frac{x}{y}}\ln z$，$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x}{y}z^{\frac{x}{y}-1}=\frac{x}{y}z^{\frac{x-y}{y}}$.

2. $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,4)}=[\frac{1}{\sqrt{xy}}-\frac{\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}}]\Big|_{\substack{x=1\\y=4}}=1-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$，$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,4)}=\left[-\frac{\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}+\frac{1}{2\sqrt{xy}}\right]\Bigg|_{\substack{x=1\\y=4}}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$.

3.（1）$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y}{xy}=\frac{1}{x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x}{y^2}$.

（2）$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\frac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\frac{(x-y)+(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}，\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}，$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{x^2+y^2-y(-2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

4. 略.

习题 7.3

1.（1）$\mathrm{d}z=\sin\left(x+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x\right)$

（2）$\mathrm{d}z=\frac{2}{y^2}\csc\frac{2x}{y}\cdot(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)$

（3）$\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y+3\mathrm{d}z}{x-2y+3z}$

（4）$\mathrm{d}u=2xz^{x^2+y^2}\ln z\cdot\mathrm{d}x+2yz^{x^2+y^2}\ln z\cdot\mathrm{d}y+(x^2+y^2)z^{x^2+y^2-1}\mathrm{d}z$

$$=z^{x^2+y^2}[2\ln z\cdot(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)+\frac{x^2+y^2}{z}\mathrm{d}z].$$

2. $\Delta z=\frac{(y+\Delta y)^2}{x+\Delta x}-\frac{y^2}{x}=\frac{(-0.8)^2}{1.9}-\frac{(-1)^2}{2}=\frac{64}{190}-\frac{1}{2}=-\frac{31}{190}\approx-0.1632$，

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,-1)}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(2,-1)}\Delta y=-\frac{1}{4}\times(-0.1)-1\times0.2=-\frac{7}{40}=-0.1750.$$

3. 解：因为 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,\ 0)-f(0,\ 0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}0=0$，

$$\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,\ \Delta y)-f(0,\ 0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to0}0=0，$$

所以在点 $O(0,\ 0)$ 处函数 $f(x,\ y)$ 的两个偏导数都存在，且 $f_x(0,\ 0)=0$、$f_y(0,\ 1)=0$.

再讨论可微性，函数在 $O(0,\ 0)$ 处的全增量用 Δz 表示，则

$\Delta z-f_x(0,\ 0)\Delta x-f_y(0,\ 0)\Delta y=\Delta z=\frac{(\Delta x)^2\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，记 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z - f_x(0,\ 0)\Delta x - f_y(0,\ 0)\Delta y}{\rho} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}$$

不存在（沿 $\Delta x = 0$ 取极限，其值为 0；沿 $\Delta y = |\Delta x|$ 取极限，其值为 $1/2\sqrt{2}$），所以函数 $f(x,\ y)$ 在点 $O(0,\ 0)$ 处不可微. 进而得偏导（函）数在 $O(0,\ 0)$ 点处不连续.

习题 7.4

1. $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\sin x - \frac{2}{x}}\left(1 + x\cos x + \dfrac{2}{x}\right)$.

2. $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1+\sqrt{t}\sin 2t}{2t+\sqrt{t}\sin^2 t}$.

3. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (x^2+y^2)^{xy-1}\left[\dfrac{2x(xy-1)}{x^2+y^2} + y\ln(x^2+y^2)\right]$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = (x^2+y^2)^{xy-1}\left[\dfrac{2y(xy-1)}{x^2+y^2} + x\ln(x^2+y^2)\right]$.

4. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{y^2}\ln(3x-2y) + \dfrac{3x^2}{(3x-2y)y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y) - \dfrac{2x^2}{(3x-2y)y^2}$.

5.（1）$\dfrac{\partial z}{\partial x} = yf_1 + 2xf_2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = xf_1 - 2yf_2$.

（2）$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{y}f_1 + \mathrm{e}^{x+y}f_2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}f_1 + \mathrm{e}^{x+y}f_2$.

6. 略.

7. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{11} + \dfrac{2}{y}f_{12} + \dfrac{1}{y^2}f_{22}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2x}{y^3}f_2 + \dfrac{x^2}{y^4}f_{22}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}(f_{12} + \dfrac{1}{y}f_{22}) - \dfrac{1}{y^2}f_2$.

习题 7.5

1. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1 - \dfrac{1}{y^2}$.

2. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x-yz}{z+xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y-xz}{z+xy}$.

3. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{z}{x+z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z^2}{y(x+z)}$.

4. 略.

5. $\dfrac{2y^2z\mathrm{e}^z - 2xy^3z - y^2z^2\mathrm{e}^z}{(\mathrm{e}^z - xy)^3}$.

6. $\dfrac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$.

习题 7.6

1. 切线方程为 $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}$,

法平面方程为 $(x-1)+(y-1)-\sqrt{2}(z-\sqrt{2})=0$，即 $x+y-\sqrt{2}z=0$.

2. 切线方程为 $\dfrac{x}{-R}=\dfrac{y-R}{0}=\dfrac{z-\frac{b\pi}{2}}{b}$，

法平面方程为 $(-R)\cdot x+0\cdot(y-R)+b\cdot\left(z-\dfrac{b\pi}{2}\right)=0$，即 $2Rx-2bz+b^2\pi=0$.

3. 切平面方程是 $2(x-1)+2(y-1)+(z-4)=0$，即 $2x+2y+z-8=0$，

法线方程是 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{1}$.

4. 切平面方程是 $2(x-1)+(y-2)-(z-2)=0$，即 $2x+y-z-2=0$，

法线方程是 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

5. 在 $(1,2,1)$ 点，切平面为 $(x-1)+4(y-2)+3(z-1)=0$，即 $x+4y+3z-12=0$；

在 $(-1,-2,-1)$ 点，切平面为 $(x+1)+4(y+2)+3(z+1)=0$，即 $x+4y+3z+12=0$.

习题 7.7

1.（1）点 $(1,0)$ 是函数的极大值点，极大值为 $f(1,\ 0)=1$，该函数无极小值.

（2）点 $(0,-1)$ 是函数的极小值点，极小值 $f(0,\ -1)=-1$，该函数无极大值.

2. 最小值为 $m=z(0,\ 0)=-1$，最大值为 $M=z(0,\ \pm 2)=11$.

3. 当长、宽都为 2 m，高为 1 m 时无盖长方体水箱容积最大（此时体积为 4 m^3）.

4. 当两直角边长都为 $\dfrac{l}{\sqrt{2}}$（即等腰直角三角形）时，其周长最大，且最大周长为 $(1+\sqrt{2})l$.

习题 8.1

1. 略　2. （1） $2\leqslant I\leqslant 8$　（2） $0\leqslant I\leqslant \pi^2$.

习题 8.2

1.（1） $\dfrac{8}{3}$　（2） $\dfrac{20}{3}$　（3） $\dfrac{13}{6}$　（4） $\pi^2-\dfrac{40}{9}$

2.（1） $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy$　（2） $\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

（3） $\int_0^1 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$　（4） $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$

3.（1） $\pi(e^4-1)$　（2） $\dfrac{\pi}{4}(2\ln 2-1)$

习题 8.3

1. 8π　2. $\sqrt{2}\pi$　3. $\left(\dfrac{7a}{3},0\right)$　4. $\left(\dfrac{35}{48},\dfrac{35}{54}\right)$

习题 8.4

1.（1）$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_{x+y}^1 f(x,y,z)dz$　（2）$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{xy} f(x,y,z)dz$

2.（1）$\frac{1}{364}$　（2）$\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$　（3）0

3.（1）$\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^3 \rho d\rho\int_\rho^3 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)dz$

（2）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\cos\theta} \rho d\rho\int_0^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)dz$

（3）$\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \rho d\rho\int_0^{1-\rho^2} f(\rho)dz$.

4.（1）$\frac{4\pi}{15}$　（2）$\frac{\pi}{2}$　（3）π

习题 8.5

1.（1）$\sqrt{2}$　（2）2　（3）$1+\sqrt{2}$

2.（1）$-\frac{56}{15}$　（2）0

习题 8.6

1.（1）$-\frac{3\pi}{2}$　（2）$-\frac{128}{15}$

2.（1）$2+\pi$　（2）4

习题 9.1

1. $u_n=\frac{2n-1}{(2n)!!}$

2.（1）收敛；（2）收敛；（3）发散；（4）收敛.

3. 反证法.

习题 9.2

1.（1）收敛；（2）发散；（3）发散；（4）收敛；（5）发散；（6）发散；（7）收敛；（8）发散.

2. 略.

习题 9.3

（1）绝对收敛；（2）条件收敛；（3）绝对收敛；（4）发散；（5）条件收敛；（6）发散.

习题 9.4

1.（1）$(-1,1]$；（2）仅在 $x=0$ 处收敛；（3）$(-\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2})$；（4）$(-1,1]$.

2.（1）$S(x)=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$，（$|x|<1$）；

（2）$S(x)=\dfrac{-\ln(1-x)}{x}$，　（$-1\leqslant x<1$）.

习题 9.5

（1）$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\ \ x\in(-\infty,+\infty)$；

（2）$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots,\ \ x\in(-1,1]$；

（3）$\arctan x=x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{5}x^5-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,\ \ x\in[-1,1]$；

（4）$e^{-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n!}x^{2n},\ \ x\in(-\infty,+\infty)$；

（5）$\ln(4-3x-x^2)=\ln 4-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{17}{32}x^2-\dfrac{63}{192}x^3-\cdots$，（$-1\leqslant x<1$）；

（6）$\dfrac{1}{x^2+4x+3}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{2^{n+2}}-\dfrac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n$，（$-1<x<3$）.